

**Горб Александр Михайлович**

**Совершенствование аналитических методов расчёта конструкций промышленных полов из цементобетона, расположенных на упругом грунтовом основании в случае использования модели местных упругих деформаций.**

Специальности:

05.23.17 - Строительная механика.

05.23.02 - Основания, фундаменты и подземные сооружения.

05.23.01 - Строительные конструкции, здания и сооружения.

**АВТОРЕФЕРАТ**

**Москва. 2009.**

## Содержание.

Наименование	Стр.
1. О необходимости внесения дополнений в нормы проектирования промышленных полов производственно-складских зданий .....	4 – 10
2. Совершенствование методов расчёта конструкций промышленных полов из цементобетона, расположенных на упругом грунтовом основании .....	11 - 15
3. Конструирование промышленных полов из монолитного цементобетона расположенных на упругом грунтовом основании .....	16- 26
3.1. Монолитные неармированные бетонные полы .....	17-18
3.2. Монолитные армобетонные, непрерывно армированные и железобетонные полы, армированные стержневой арматурой .....	19
3.3. Армобетонные полы .....	19
3.4. Непрерывно армированные бесшовные полы .....	20-21
3.5. Железобетонные полы .....	21-22
3.6. Монолитные предварительно напряжённые железобетонные полы .....	22-23
3.7. Усиление промышленных бетонных полов при реконструкции .....	24-26
4. Основные положения расчёта .....	27 – 33
5. Теоретическое обоснование принципов расчёта конструкций бетонных полов .....	34 – 37
6. Обоснование принципов расчёта конструкций полов на основе гипотезы коэффициента постели .....	38-51
6.1. Решения для прямоугольных плит, лежащих на упругом основании .....	39-41
6.2. Решения для случая симметричного нагружения плиты (задача об изгибе круглой пластинки нагруженной сосредоточенной силой равномерно-распределённой по кругу или квадрату малой площади .....	42-47
6.3. Использование функций Бесселя при решении задачи об изгибе круглой пластинки .....	47-51
6.4. Решения для краевых нагружений плит .....	51-58
7. Расчёт железобетонных конструкций полов .....	58-61
8. Особенности расчёта предварительно-напряжённых плит полов	62-68
9. Расчёт сталефибробетонных плит полов .....	69-79

10. Проектирование многослойных конструкций промышленных полов .....	80 - 90
11. Расчёт и конструирование бетонных полов с учётом динамического воздействия нагрузок от перемещения грузоподъёмного транспорта .....	91 - 101
11.1. Динамическое воздействие подвижной нагрузки .....	91 - 97
11.2. Назначение расчётных коэффициентов динамичности .....	98 - 101
12. Назначение коэффициента жёсткости упругого основания в случае применения модели местных упругих деформаций .....	102 – 113
13. Зависимость между коэффициентом постели и модулем упругости основания .....	114 – 116
14. Определение коэффициента постели многослойного основания.	117 – 120
15. Определение модуля упругости и эквивалентной глубины деформируемого слоя многослойного основания .....	121 – 123
16. Расчёт и конструирование искусственных оснований .....	124 – 132
17. Работы, опубликованные автором .....	133 - 134
18. Литература .....	135– 141
19. Приложения .....	

# **1. О НЕОБХОДИМОСТИ ВНЕСЕНИЯ ДОПОЛНЕНИЙ В НОРМЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПОЛОВ ПРОИЗВОДСТВЕННО - СКЛАДСКИХ ЗДАНИЙ.**

## *Аннотация*

*Объемы строительства зданий производственно - складского назначения в последнее десятилетие существенно возросли. Площади возводимых сооружений превышают 5 млн кв.м. в год, из которых большая часть приходится на складские здания и многофункциональные логистические комплексы. Стремление инвесторов использовать возводимые площади с максимальной эффективностью, привело к соответствующему развитию складских технологий, позволяющих обеспечить значительный рост объемов хранения и скорость обработки грузов. Вместе с тем, значительно возросли нагрузки на полы и повысились технические требования к ним. Однако, проектирование таких полов не в достаточной мере обеспечено соответствующими нормативами.*

*Действующий СНиП 2.03.13-88 «Полы» и его Приложения предусматривают проектирование только неармированных бетонных полов, без указания методов расчёта в случае их армирования. Также, в нём не совсем корректно указан способ назначения коэффициентов жесткости грунтового основания, рекомендуемый табличный метод определения коэффициентов постели не отвечает реалиям и серьёзно устарел.*

*Существующие методы расчёта не учитывают возникающие усилия при краевых загрузках, что приводит к искажению результатов расчётов и, в дальнейшем, к снижению долговечности и эксплуатационной надёжности пола. Не освещены вопросы проектирования многослойных плит, не указаны способы расчёта в случае усиления существующих полов с целью повышения их несущей способности, отсутствуют рекомендации по динамическим расчётам.*

*Проектная практика и анализ технического состояния эксплуатируемых полов показали ограниченность области применения существующих норм. Произвольно используемые проектными организациями модели и методы расчётов, зачастую приводят к ошибочности принимаемых решений, неоправданным экономическим затратам и к возникновению в процессе эксплуатации многочисленных дефектов в готовой конструкции.*

*Можно констатировать, что действующие нормативы не позволяют получить обоснованные конструктивные решения и нуждаются в существенной корректировке.*

*В целях совершенствования существующих методов расчёта конструкций промышленных полов, были проведены соответствующие теоретические исследования, в результате которых были получены основные расчётные формулы и зависимости. Рациональность и достоверность полученных результатов основана на решениях задач теории упругости и подтверждена многолетней безупречной эксплуатацией построенных полов.*

*Результаты данной работы позволяют выполнить обоснованные расчёты конструкций полов на упругом грунтовом основании, исходя из первой и второй групп предельных состояний. Полученные результаты и основанные на них рекомендации позволяют повысить надёжность и экономичность конструкций промышленных полов производственно-складских зданий. Они могут быть также использованы в учебном процессе преподавания дисциплин строительного профиля.*

При проектировании зданий и сооружений и конструкций полов, в частности, необходимым является учёт требований действующих строительных норм и правил. **Основным нормативным документом для проектирования полов, на сегодняшний день, является СНиП 2.03.13-88 «Полы»,** разработанный ЦНИИПромзданий, в котором определены основные правила и нормы проектирования. Для практического использования разработаны приложения к этому СНиПу, в том числе: **«Полы. Технические требования и правила проектирования, устройства, приёмки, эксплуатации и ремонта» (в развитие СНиП 2.03.13-88 «Полы»)** и **«Рекомендации по расчету бетонных подстилающих слоев промышленных зданий с учетом экономической ответственности».** (ЦНИИ Промзданий, 1987г.). Указанные нормативы содержат необходимый расчетный аппарат для оценки несущей способности и эксплуатационной надежности бетонных полов. Однако, рассматриваемые методики практически «транслированы» из ранее принятого в 1971г СНиПа II-V.8-71 «Полы. Нормы проектирования», без существенных изменений. К сожалению, использование в современных условиях существующих нормативных документов не обеспечивает в должной степени принятие обоснованных проектных решений.

Объемы строительства складских зданий, в последнее, десятилетие существенно возросли. Стремление инвесторов использовать складские площади с максимальной эффективностью привело к соответствующему развитию складских технологий, позволяющих обеспечить значительный рост объемов хранения и скорости обработки грузов.

**Во-первых,** это привело к появлению новых типов тяжеловесного (до 14тн) подъемно-транспортного оборудования (ПТО) с относительно большим удельным давлением (до 100 кг/кв.см) без амортизирующих устройств. Существенно возросли скорости их перемещения, что в итоге, вызывает необходимость учёта усталостных напряжений материала плиты, динамичности и фактора накопления остаточных прогибов в подстилающем основании, особенно вблизи швов.

**Во-вторых,** современная ситуация привела к появлению принципиально новых типов многоярусных (в том числе т.н. «узкопроходных») систем хранения грузов, основывающихся на использовании специальных конструктивных решений стеллажных систем, стойки которых передают на пол нагрузку до 25тн через

опорные части незначительного размера (около 2x10x10см). В ряде случаев стойки стеллажей играют роль несущего каркаса здания, то есть функциональное назначение стеллажей в этом случае существенно расширяется, с вытекающими отсюда последствиями.

Несмотря на возросшие в последние годы нагрузки на полы, в действующих нормах даётся указание на использование в качестве несущей плиты пола конструкции из неармированного бетона, что является неприемлемым по техническим и экономическим причинам.

**В третьих**, физико-механические свойства грунтов основания, на которых устраиваются полы, оставляют желать лучшего. При этом часто, по техническим и экономическим причинам, не представляется возможным произвести устройство свайных фундаментов или замену грунтов с неудовлетворительными свойствами на приемлемые (с точки зрения деформативных свойств). Вместе с тем в действующих нормативах отсутствует корректная методика определения коэффициентов жёсткости однослойных и многослойных оснований.

Вполне очевидно, что назрела необходимость усовершенствования существующих методов расчёта.

Разработанный в 1988г. ОАО «ЦНИИПромзданий» СНиП 2.03.13-88 «Полы» следующим образом описывают область его применения: данный СНиП *«...распространяется на правила проектирования и устройства полов производственных, жилых, общественных, административных, бытовых, животноводческих, птицеводческих и звероводческих зданий»*. Как ни парадоксально, указание о возможности применения данного СНиПа для зданий складского назначения отсутствует. При этом известно, что в производственных зданиях полы, как правило, не испытывают значительных нагрузок, всё тяжелое оборудование размещается на отдельно стоящих фундаментах.

Еще в августе 1977г. в статье Ю.Т. Чернова (ЦНИИСК им. Кучеренко) и С.А. Шимановича (ЦНИИПромзданий) «Железобетонные подстилающие слои для полов промышленных зданий», опубликованной в журнале «Промышленное строительство», была обоснована необходимость перехода от бетонных к железобетонным подстилающим слоям полов промышленных зданий в связи с ростом действующих на полы нагрузок, обусловленных технологическими

процессами на предприятиях металлургической и автомобильной промышленности. Отмечено, что устройство бетонных подстилающих слоев становится неэффективным из-за резкого увеличения их толщин, а в некоторых случаях оно даже невозможно по условиям прочности. Например, при нагрузке на пол до 50 кН/м<sup>2</sup> и движении напольного транспорта максимальной грузоподъемностью до 200 кН применяются бетонные подстилающие слои толщиной до 200 мм. При увеличении нагрузки на пол до 100 кН/м<sup>2</sup> толщина бетонного подстилающего слоя увеличивается до 550 мм, стоимость его возрастает в 1,5-3 раза, а трудоемкость в 2-3 раза.

Вместе с тем, по сей день действующие нормативы не предусматривают методику расчета армированных подстилающих слоев для полов промышленных зданий. В настоящее время, учитывая ещё более возросшие нагрузки, актуальность этой проблемы стала ещё больше.

В современной практике устройства промышленных полов широкое применение получает фибробетон. Объемное содержание стальной фибры в таких конструкциях, как правило, ниже минимально необходимого уровня (объемный расход фибры не превышает 20-40 кг/куб.м). Корректно выполнить расчёт при таких условиях, в соответствии с действующим СП52-104-2006 "Сталефибробетонные конструкции", не представляется возможным - указание п.8.3.7 данного СП предусматривает более высокий процент армирования. Тем не менее, введение в бетонную смесь стальной фибры вполне обоснованно, так как даже при таком незначительном расходе фибры существенно повышается величина работы, которую необходимо затратить для разрушения бетонного пола, существенно увеличивается показатель вязкости разрушения, что весьма важно для обеспечения эксплуатационной надежности конструкции пола. При проектировании промышленных полов эти обстоятельства необходимо учитывать. Зарубежные нормы (Германия, Япония, Англия, США) позволяют рассчитать конструкцию пола с учетом степени армирования стальной фиброй ниже минимального уровня, например, с использованием теории линий разрушений, но действующие отечественные нормы, к сожалению, такую ситуацию не рассматривают.

Общепризнано, что предусмотренные действующими нормами конструктивные решения, предполагающие устройство тонких (20 - 50мм) финишных слоев из «высокопрочного» бетона по бетонному подстилающему слою, технически и экономически не оправданы, поскольку в этом случае не учитываются технологические и экономические аспекты, в том числе обоснованность устройства полов по «двухстадийной» схеме. Несмотря на это, в проектной практике зачастую можно встретить подобные решения.

Также в нормах не представлен метод расчета двухслойных бетонных полов, что на сегодняшний день крайне востребовано при реконструкции полов для увеличения их несущей способности, а так же, при невозможности по различным причинам устраивать полы в виде однослойной плиты. Существующий метод рассматривает двухслойную конструкцию, состоящую из «нижнего» бетонного подстилающего слоя и слоя «покрытия» с «нулевой» жёсткостью. К сожалению, даже указанный метод содержит неточности в части характера распределения и передачи нагрузки на нижележащую плиту.

Отсутствуют рекомендации по расчёту участков (зон) плит полов вблизи швов. Отсутствие учёта нагрузок, приложенных на краях и углах плит, приводит к искажению результатов расчётов и необеспечению несущей способности плиты в этих зонах.

Не приведены указания по расчёту эквивалентного коэффициента постели многослойного основания, что особенно важно в случае наличия в составе сжимаемой толщи просадочных и слабых водонасыщенных грунтов. Табличный метод назначения коэффициентов постели является некорректным, не отражает реалий, и давно устарел.

Не нормированы требования к подготовке грунтового основания и подстилающих слоёв.

Не разработаны методы диагностики полов и способы устранения дефектов.

Предусмотренная современными строительными технологиями дневная производительность работ до 5000 кв.м требует организации в полу различных типов швов, как по технологическим причинам, так и для ограничения величин температурно-усадочных напряжений и деформаций, которые в гипотетическом случае применения чисто бетонной конструкции достигают неприемлемых

величин. До сих пор не проработаны вопросы принципов расчёта и конструирования таких швов, расстояний между ними и их влияние на конструкцию пола в целом.

Отсутствие в действующих нормах указаний по решению вышеуказанных задач в большинстве случаев приводит к необоснованному и ошибочному принятию проектных решений. Учитывая возросшие требования к качеству и надёжности современных полов, такая ситуация недопустима.

Рассмотрение в данной работе вопросов проектирования полов в зданиях производственно - складского назначения весьма актуально по причине, как уже отмечалось, существенного увеличения объемов строительства таких зданий на территории Российской Федерации. При этом, до сих пор у инженера-проектировщика отсутствует простой и ясный инструмент для расчета полов, решения часто выбираются «по аналогии» без учёта всех особенностей, присущих данному типу конструкции и конкретному объекту. Экономичность и надёжность проектных решений зависит от качества расчетного аппарата, который, к сожалению, не соответствует современным требованиям.

**Предлагаемые методы расчётов** основаны на указаниях действующих нормативных документов, учитывают технические и технологические требования предъявляемые к современным промышленным полам поставщиками подъёмно-транспортного и технологического оборудования и базируются на решениях теории упругости для бесконечной гибкой плиты, лежащей на упругом винклеровском основании.

**Предлагаемые новые конструктивные решения** учитывают возросшие требования к полам при строительстве новых и реконструкции существующих складских зданий, предложения по использованию современных строительных технологий, возможные конструктивные, экономические, сырьевые и т.п. ограничения на конкретном объекте и реально требуемую степень экономической ответственности.

Разработанные проектные и технологические решения могут быть рекомендованы проектным и строительным организациям для массового применения при возведении и реконструкции полов в зданиях современных складов.

## **2. СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДОВ РАСЧЁТА КОНСТРУКЦИЙ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПОЛОВ ИЗ ЦЕМЕНТОБЕТОНА, РАСПОЛОЖЕННЫХ НА УПРУГОМ ГРУНТОВОМ ОСНОВАНИИ.**

### **Введение.**

Устройство промышленных полов из цементобетона является одним из перспективных направлений и получило широкое распространение во всём мире. Возрастающие требования, предъявляемые к современным промышленным объектам, обуславливают необходимость проектирования и устройства полов с повышенной прочностью и износостойкостью. На сегодняшний день особо актуальным стал вопрос совершенствования методов расчёта и конструирования таких полов, с учётом многообразия условий конкретных строительных объектов.

Действующими строительными нормами допускается устройство плит полов в том числе и из неармированного бетона. Такие конструкции имеют определённые преимущества по сравнению с полами других типов: высокую прочность и долговечность, устойчивость к воздействиям различных эксплуатационных нагрузок, беспыльность и достаточную водонепроницаемость, возможность использования местных строительных материалов, возможность производства работ механизированным способом с использованием прогрессивных технологий и поточным методом, а также сравнительно низкие эксплуатационные расходы.

Однако низкая стойкость основного материала (бетона) к воздействию растягивающих усилий обуславливает его невысокую сопротивляемость температурно-усадочным напряжениям, которые могут развивать критические состояния, особенно опасные в начальный период твердения бетона. Эти особенности конструкций бетонных полов требуют проведения специальных мероприятий, уменьшающих влияние отрицательных свойств неармированного бетона, в том числе их армирование и устройство различных типов швов и прослоек.

Конструкции промышленных полов предусматривают несколько конструктивных слоев, выполняющих разные назначения. При этом, различают верхний (бетонный) слой (слои) и нижний слой – грунтовое основание (искусственное и естественное).

Верхний слой непосредственно воспринимает статические, динамические и вибрационные нагрузки от опор стоек стеллажей, технологического оборудования, временных и стационарных построек, колёс подъёмно-транспортного оборудования, а также подвергается воздействию температурных, ударных, а иногда и химических воздействий. Он должен быть наиболее прочен и устойчив. Часто, для повышения стойкости поверхности пола к восприятию химических, абразивных и т.п. эксплуатационных нагрузок и воздействий предусматривается устройство дополнительных конструктивных слоёв, воспринимающих такие воздействия.

В зависимости от способа армирования верхние слои пола подразделяются на бетонные, армобетонные, железобетонные и фибробетонные.

Искусственное основание - несущая часть конструкции, устраиваемая, как правило, из местного материала, обеспечивающее совместно с верхним слоем передачу усилий на естественное грунтовое основание. В состав искусственного основания могут входить слои из щебня, гравия, песка и других местных материалов, обладающих соответствующей прочностью.

Естественное грунтовое основание – подстилающие материковые грунты, воспринимающие нагрузки, передаваемые через верхний слой и искусственное основание.

При усадке, изменении температуры и влажности в монолитных полах возникают растягивающие напряжения, вызывающие их трещинообразование. Для снижения этих напряжений и предотвращения растрескивания, монолитные бетонные полы разделяют на отдельные плиты (карты), продольными и поперечными швами, как правило, прямоугольной формы. Швы устраивают по типу сжатия или расширения. Швы сжатия дают возможность плитам сокращать свои размеры, т. е. сжиматься при усадке бетона в процессе его твердения и при понижении температуры. Швы расширения представляют собой зазоры между соседними плитами, ширина которых обеспечивает свободу перемещения плит при их расширении вследствие повышения температуры, при увеличении влажности бетона или при необходимости изолирования конструкции плиты пола от несущих элементов здания. По типу швов сжатия устраивают продольные и поперечные швы. Швы расширения также применяют в местах изменения толщин

примыкающих участков плит полов в процессе укладки бетона.

Ранее швы расширения устраивали, как правило, с шагом 12-24м. Однако в последние годы от их устройства отказались, так как они существенно влияют на долговечность полов вблизи таких швов при их интенсивной эксплуатации и не выполняют своих функций. **Необходимость устройства швов расширения должна быть соответствующим образом обоснована.**

Чтобы уменьшить влияние швов сжатия и расширения на несущую способность плиты пола, в них предусматривают различные стыковые соединения для распределения нагрузок, находящейся у шва, на соседние плиты или усиление краевых участков плит дополнительной стержневой арматурой. К стыковым соединениям предъявляют два основных требования: они должны допускать горизонтальное перемещение плит при температурно - усадочных деформациях, и не допускать взаимных вертикальных поперечных смещений смежных плит при воздействии эксплуатационных нагрузок, то есть обеспечивать передачу части нагрузки с одной плиты на другую. Во всех швах, как правило, предусматривают стыковые соединения, как правило, это штыревые, шпунтовые или ромбовидные соединения из металлических пластин. Относительно недавно расчёт таких соединений производился исходя из шарнирного соединения смежных плит. Однако, последние исследования доказали обоснованность применения в расчётах плит на упругом основании расчётной схемы шарнирно-подвижного соединения.

Искусственные основания под полы выполняют с лабораторным контролем их уплотнения. При устройстве искусственных оснований из крупнозернистых материалов, укладываемых непосредственно на глинистые, суглинистые и пылеватые грунты, должна быть предусмотрена изолирующая прослойка, исключающая проникание грунта при его уплотнении в слой крупнозернистого материала. Прослойку, как правило, устраивают из геотекстильных материалов.

При устройстве полов в неотопливаемых помещениях или на открытых площадках, на участках с грунтами, подверженными пучению, необходимо учитывать эти особенности. Предотвращению пучения грунтов могут способствовать следующие мероприятия: необходимое возвышение отметки чистого пола над уровнем подземных вод; использование в промерзающем слое грунтов, не подверженных вспучиванию (песка, гравия, щебня), а также снижение

глубины промерзания посредством устройства теплоизолирующих прослоек.

Основными материалами для устройства полов являются бетон и арматура (стержневая и фибровая). Бетон, при этом, является основой, и его свойства в значительной мере определяют долговечность полов. Особенности эксплуатации промышленных полов, которые необходимо учитывать при назначении состава бетона, являются: многократно повторяющиеся интенсивные динамические нагрузки, ударные и температурные воздействия, а так же повышенные требования к истираемости поверхности. Сложные условия работы бетона в конструкциях промышленных полов обуславливают ряд требований к нему. Бетон должен иметь высокую механическую прочность, плотность и обладать, при определённых условиях, достаточной морозостойкостью и водонепроницаемостью. В качестве вяжущего, в силу ряда причин, следует использовать бездобавочный портландцемент. Для уменьшения усадки в процессе твердения при подборе состава бетона необходимо стремиться к снижению количества вяжущего, путём использования высокомарочного высокомодульного цемента высокого качества, использования в качестве мелкого заполнителя крупных песков, применения прочных крупных заполнителей, а также к снижению водоцементного отношения. Для повышения пластичности и улучшения свойств бетонной смеси допустимо использование пластифицирующих добавок. Содержание растворной части в бетоне должно быть оптимальным для проведения работ по чистовой обработке бетона, в условиях конкретной строительной площадки. Время схватывания бетона должно быть определено; бетон не должен подвергаться замедленному схватыванию, иметь разность во времени схватывания или проблем с образованием поверхностной «корки» из-за свойств конкретных добавок и температурно-влажностных условий, существующих на строительной площадке. Некоторые виды пластифицирующих добавок могут создавать подобные явления, особенно при их чрезмерном содержании в бетонной смеси. Особо тщательно необходимо контролировать наличие и процентное содержание примесей в заполнителях; их количество, по необходимости должно быть сведено к минимуму.

Для устройства полов применяется тяжелый бетон, отвечающий требованиям ГОСТ 25192-82. «Бетоны. Классификация и общие технические

требования» и ГОСТ 26633-85. «Бетон тяжелый. Технические условия» и иметь минимальную прочность на сжатие, соответствующую классу В22,5.

Для армирования монолитных армированных плит полов используется стержневая и фибровая арматура в соответствии с требованиями СП 52-01-2003. «Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения» и СП 52-104-2006 «Сталефибробетонные конструкции».

В качестве стержневой арматуры применяют обыкновенную арматурную проволоку классов Вр-1 (в сварных сетках) или арматурную сталь периодического профиля классов А400С и А500С. В качестве монтажной и конструктивной арматуры, а также для элементов стыковых соединений используют горячекатаную арматурную сталь класса А-І.

Для фибрового армирования используется стальная фибра фрезерованная из слябов, выпускаемая по ТУ 0882-193-46854090, резанная из стального листа, выпускаемая по ТУ 0991-123-53832025, и рубленая из проволоки, выпускаемая по ТУ 1211-205-46854090.

Ниже приведены основные положения, методики и обоснования расчёта конструкций промышленных полов из цементобетона.

### **3. КОНСТРУИРОВАНИЕ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПОЛОВ ИЗ МОНОЛИТНОГО ЦЕМЕНТОБЕТОНА, РАСПОЛОЖЕННЫХ НА УПРУГОМ ГРУНТОВОМ ОСНОВАНИИ.**

Конструкции промышленных полов обычно изготавливаются из цементобетона различных классов и марок, в виде одно- или двухслойных монолитных плит различной толщины и характера армирования. Существуют три основных варианта конструкций полов, в зависимости от характера их армирования:

- конструкции из неармированного бетона;
- конструкции, армированные стержневой или фибровой арматурой с целью уменьшения трещинообразования при усадке, изменении температуры и влажности бетона и окружающей среды;
- конструкции, армированные стержневой и/или фибровой арматурой, воспринимающей помимо температурно - усадочных напряжений, силовые воздействия от эксплуатационных нагрузок.

Выбор оптимальной конструкции должен производиться на основании технико-экономического сравнения вариантов. Выбранный вариант, в том числе, должен обеспечивать:

- комплексность конструктивных и технологических решений;
- прочность, устойчивость и долговечность грунтового и искусственного оснований, а также конструктивных слоёв пола;
- наиболее полное использование прочностных и деформативных характеристик грунтов и физико-механических свойств применяемых материалов;
- ровность, износоустойчивость и беспыльность поверхности;
- оптимальное использование местных строительных материалов;
- возможность максимальной механизации и технологичности строительных работ;
- оптимальные эксплуатационные качества устраиваемых полов, соответствующих заданным требованиям;
- минимально необходимые единовременные и суммарные приведённые затраты на строительство и эксплуатацию.

### **3.1. Монолитные неармированные бетонные полы.**

Неармированные бетонные полы устраивают, как правило, в виде однослойных плит из монолитного цементобетона толщиной не более 25 см. В плитах большей толщины, явления коробления и последствия неравномерной усадки бетона приобретают недопустимые значения. В том случае, когда на основании расчёта требуется толщина плиты больше допустимой, необходимо применять двухслойную конструкцию, состоящую из двух независимых бетонных слоёв. В двухслойных плитах в качестве нижнего слоя, как правило, используют менее прочный цементобетон, тощий бетон или керамзитобетон. Керамзитобетон обладает хорошей термоизолирующей способностью, и поэтому его целесообразно применять при наличии в основании пучинистых грунтов, в случае их возможного промерзания в период строительства и эксплуатации здания или сооружения. Конструкция плиты нижнего слоя должна иметь достаточную несущую способность, обеспечивающую возможность перемещения построечного транспорта, а также временного складирования необходимых для строительства материалов и конструкций.

Между плитами верхнего и нижнего слоёв располагают разделительную прослойку. Основное назначение прослойки состоит в том, чтобы снизить трение между слоями, обеспечив свободу разнонаправленного деформирования при их усадке и изменении температуры окружающей среды. Обычно, в этом случае, применяются полимерная плёнка толщиной 0,2 - 0,25 мм. При необходимости выравнивания поверхности плиты нижнего слоя, защиты прослойки от механических повреждений, а также для дополнительного снижения трения между слоями, устраивается песчаный выравнивающий слой толщиной до 5 см. При необходимости устройства выравнивающего слоя большей толщины, используют более устойчивые к сдвиговым деформациям материалы: пескоцемент или мелкофракционный щебень.

Высокое качество отделки поверхности нижнего слоя позволяет отказаться от его выравнивания. В этом случае, для снижения трения между слоями допустимо использовать только плёночную прослойку, одновременно выполняющая роль средства по уходу за бетоном.

При проектировании полов из неармированного бетона важным является учёт температурно-усадочных напряжений и деформаций, возникающих в период его твердения. При этом, учитывая рассматриваемый тип конструкции, характерным

является различие в скорости набора прочности и охлаждения верхней и нижней части плиты, что приводит к формированию внутреннего градиента напряжений по высоте сечения плиты и, в связи с этим, к возможности появления усадочных трещин, если не принять соответствующих мер по их снижению.

Для предотвращения растрескивания от воздействия внутренних температурно-усадочных напряжений бетонные однослойные плиты и верхний слой двухслойных плит проектируют из стандартных прямоугольных плит при соотношении сторон в плане 1:1 - 1:1,5, при этом, более предпочтительным является соотношение 1:1. Прямоугольные бетонные плиты образуются делением плиты продольными и поперечными температурно-усадочными швами сжатия с целью снижения риска образования случайных трещин в результате объёмных деформаций бетона. Для неармированных бетонных плит расстояние между швами составляет от 24 до 36 толщин плиты в зависимости от свойств применяемого бетона и температурно-влажностных условий окружающей среды. Наибольшее расстояние между швами для однослойных и верхнего слоя двухслойных плит не должно превышать 6 м. Расстояния между швами в нижнем слое двухслойных конструкций может быть увеличено до 15м. Двухслойные конструкции проектируют с совмещением или несомещением швов в слоях. Двухслойными конструкциями с несомещенными швами считаются такие, в которых продольные и поперечные швы в слоях взаимно смещены относительно друг друга более чем на  $2h_g$  ( $h_g$  - толщина верхнего слоя).

При устройстве двухслойных плит с совмещенными швами предусматривают взаимное смещение швов в обоих направлениях от 1,5 до 2,0  $h_g$ . В конструкциях с совмещенными швами жесткость плиты нижнего слоя не должна превышать жесткость верхнего более чем в 2 раза.

Опыт показывает, что применение в качестве несущей конструкции пола плит из неармированного бетона, способствует образованию усадочных трещин не менее чем на 5% площади пола. Их число зависит от деформативных свойств основания, прочностных свойств бетона, температурно-влажностных условий окружающей среды, характера нагрузок, а также других факторов и их сочетаний. Часто расположенные швы с неконтролируемым раскрытием, так же являются очагами разрушения, поэтому их большое число в сочетании с хаотично расположенными трещинами являются главными недостатками неармированных бетонных полов.

## **3.2. Монолитные армобетонные, непрерывно армированные и железобетонные полы, армированные стержневой арматурой.**

### ***3.2.1. Армобетонные полы.***

Армобетонные плиты пола обладают рядом преимуществ по сравнению с бетонными, основными из которых являются следующие: повышенная деформативная способность армированного бетона значительно снижает риск образования случайных трещин от многократно повторяющихся подвижных нагрузок, возникающих усадочных напряжений и температурно - влажностных изменений окружающей среды. Наличие арматуры препятствует раскрытию образовавшихся трещин, позволяет увеличить расстояния между швами и соответственно уменьшить их количество, что существенно улучшает эксплуатационные показатели и долговечность полов.

Армобетонные плиты армируют сварными и вязаными сетками из стержневой арматуры периодического профиля диаметром 6 - 10 мм с шагом 100 – 200 мм. Сетки располагают в верхней зоне сечения, на расстоянии от поверхности от 1/3 до 1/4 толщины плиты. Отдельные сетки стыкуют между собой внахлестку без сварки или с частичной сваркой и связыванием. Длина перепуска стержней должна быть в поперечном направлении не менее 15-ти диаметров стержней, а в продольном направлении не менее 30-ти диаметров.

Монолитные армобетонные плиты разделяют на отдельные прямоугольные плиты продольными и поперечными швами сжатия. Расстояние между поперечными швами не должно превышать 12 м. Продольные швы сжатия совмещаются с технологическими швами и выполняются с использованием штыревых соединений между смежными плитами.

Расчёт армобетонных плит не отличается от расчёта бетонной конструкции, однако, наличие конструктивной арматуры позволяет уменьшить толщину плиты на 10%.

### ***3.2.2. Непрерывно армированные бесшовные полы.***

Непрерывно армированные бесшовные полы являются разновидностью армированных полов. В таких полах стальная стержневая арматура размещена непрерывно по всей длине полосы бетонирования. Поперечные температурно-усадочные швы, при этом, не устраиваются, так как их функции выполняют образовавшиеся при строительстве и эксплуатации микротрещины, ограниченные максимальной шириной 0,3 мм. Ограничение раскрытия трещин обеспечивается насыщением бетонного сечения продольной арматурой с расходом 5 - 8 см<sup>2</sup> на 1 погонный метр поперечного сечения плиты. Такие полы представляют собой ряд продольных полос, примыкающих друг к другу. Длину каждой полосы принимают по конструктивным соображениям и, как правило, ограничивают габаритными размерами помещения. Она может иметь длину 100 м и более. В непрерывно армированных полах выполняют швы следующих видов: продольные - между продольными полосами бетонирования и поперечные - швы примыкания торцов продольных полос, являющихся продолжением друг друга. Толщина таких плит должна быть не менее 0,15 м.

По характеру трещинообразования различают конструкции с нерегулируемым и регулируемым трещинообразованием.

В первом случае возможны два варианта бесшовных плит: по типу армобетонных, с размещением рабочей арматуры в верхней трети плиты и по типу обычных железобетонных, с размещением рабочей арматуры в верхней и нижней зонах сечения плиты.

Во втором случае плиты с регулируемым трещинообразованием (шарнирные плиты) состоят из ряда элементов (плит) длиной  $l_n$ , не имеющих трещин, через которые проходит непрерывная арматура. Создание шарнира может быть обеспечено различными конструктивными мероприятиями. В одном из возможных решений арматуру верхней зоны (при её наличии) прерывают, а отдельные участки  $l$  продольной арматуры нижней зоны изолируют от бетона путем обмазки пластичным материалом (битумом, праймером) и установкой картонных или полиэтиленовых изолирующих трубок. По центру участков  $l$  нарезают ложные швы. Поперечная арматура, уложенная вдоль оси шва, в его вертикальной проекции, служит дополнительным позитивным концентратором напряжений. В

другом решении, продольную арматуру в месте нарезки ложного шва прерывают. Однако, для ограничения раскрытия шва, восприятия усилий, а так же передачи нагрузки с одной плиты на другую, в швах устраивают анкерное и штыревое соединения. Для обеспечения свободной подвижки бетона по арматуре стержни анкера на участке  $l$  и штыри на  $2/3$  их длины обмазывают пластичным материалом. Штыри располагают в средней зоне сечения, а анкера в нижней трети плиты.

В обоих конструктивных решениях температурные и усадочные изменения длины между соседними шарнирами возможны благодаря растяжению арматуры на участке  $l$ , где она не имеет сцепления с бетоном.

Армирование плит осуществляют сварными или вязаными сетками из стержневой арматуры периодического профиля диаметром 8 - 12 мм. Непрерывность продольного армирования плит осуществляется за счет перепуска стыкуемых стержней и сеток, составляющего не менее 30 диаметров рабочей арматуры.

Непрерывно армированные плиты полов, с нерегулируемым трещинообразованием обладают повышенной ровностью, долговечностью и экономичностью при строительстве и эксплуатации. При этом, существенным является экономический аспект, где снижение затрат достигается снижением толщины и армирования таких плит, что обуславливается отсутствием повышенных краевых напряжений на участках вблизи швов за счёт непрерывности армирования в швах. Наличие минимального количества поперечных швов и ограниченное их раскрытие, существенно влияет на эксплуатационные качества полов. На сегодняшний день применение непрерывно армированных конструкций полов ограничено, однако в перспективе ожидается их широкое применение.

### ***3.2.3. Железобетонные полы.***

Железобетонные полы обладают наибольшей прочностью и долговечностью по сравнению с бетонными и армобетонными. При действии эксплуатационных нагрузок и воздействий они работают с образованием трещин в растянутой зоне. В сечениях с раскрывшимися трещинами растягивающие усилия воспринимает арматура, сжимающие усилия – бетон или бетон в сочетании с арматурой. Наличие арматуры, пересекающей трещину, ограничивает её ширину и глубину раскрытия.

Железобетонные полы так же, как и бетонные, разбивают в плане продольными и поперечными швами сжатия на прямоугольные плиты. Длину плит, то есть расстояния между швами сжатия, увеличивают, при этом, до 40 м. Рекомендуемая толщина железобетонных плит составляет 16 – 25 см, а расход стали 12 - 26 кг/м<sup>2</sup>. Для их армирования используют стальную стержневую арматуру периодического профиля диаметром 8 - 14 мм в виде сварных или вязаных сеток и каркасов. Арматуру размещают в верхней и нижней зонах сечения плиты в соответствии с эпюрой действующих изгибающих моментов. Степень насыщения бетона арматурой характеризуется процентом армирования  $\mu_a = F_a / F_{\sigma} \cdot 100$  (где:  $F_a$  - площадь поперечного сечения арматуры;  $F_{\sigma}$  - площадь сечения плиты при высоте  $h$  и ширине  $b$ ). Оптимальное значение  $\mu_a$  для железобетонных конструкций плит составляет 0,15 - 0,40 %. Максимальное количество арматуры размещается в нижней зоне сечения плиты. Продольные и поперечные швы в железобетонных полах устраивают по типу штыревых, сквозных или ложных.

#### ***3.2.4. Монолитные предварительно напряженные железобетонные полы.***

Низкая прочность бетона на растяжение и малая растяжимость до разрыва являются его существенными недостатками. Удлинение бетона в момент разрушения от разрыва составляет около 0,15 мм/м. При таком удлинении напряжения в арматуре достигают примерно 30 МПа. Поэтому, ещё задолго до полного исчерпания несущей способности арматуры, в растянутой зоне бетона появляются трещины. Для повышения трещиностойкости и долговечности полов производится их предварительное напряжение.

Полы из монолитного предварительно напряженного железобетона обладают высокой трещиностойкостью благодаря хорошей сопротивляемости растягивающим и изгибающим усилиям. Такие конструкции допускают большое раскрытие трещин в бетоне растянутой зоны, так как под влиянием предварительных напряжений сжатия трещины после снятия нагрузки закрываются. Это позволяет уменьшить толщину плит в 1,5 - 2 раза по сравнению с бетонными и расход арматуры в 2 - 3 раза по сравнению с обычными железобетонными полами и устраиваться в виде бесшовных плит больших размеров, с

минимальным количеством швов и тем самым улучшает эксплуатационные качества полов.

Наряду с отмеченными преимуществами, предварительно напряженные конструкции полов имеют и ряд недостатков, наиболее существенными из которых являются: сложность технологического оборудования и производства работ, необходимость участия специально обученного высококвалифицированного персонала, а так же применения повышенных мер по технике безопасности и охране труда.

### **3.3. Усиление промышленных бетонных полов при реконструкции.**

Усиление существующих бетонных полов обуславливается необходимостью повышения несущей способности и наличием дефектов (выбоин, трещин, деформаций, сильного износа верхнего слоя и т.п.), недопустимых для их нормальной эксплуатации, устранение которых невозможно текущим ремонтом.

Методы усиления следует определять с учетом планируемых нагрузок и воздействий, в зависимости от технического состояния существующей плиты пола, естественного и искусственного оснований, водосточно-дренажной сети и гидрогеологических условий строительной площадки.

Для слоя усиления применяют бетон, армобетон, железобетон и фибробетон.

Усиление существующих полов осуществляется методом сращивания и методом наращивания по разделительной прослойке. В случае сращивания обеспечивается надежная связь между слоем усиления и плитами существующего пола при обязательном совмещении швов в слое усиления со швами в существующих полах.

При усилении методом сращивания необходимо обеспечить надёжную связь между существующими плитами пола и устраиваемым слоем усиления. Снижение прочности сопряжения старого и нового бетона по сравнению с монолитным сечением объясняется меньшей величиной сил адгезии растворной части бетона к затвердевшему бетону по сравнению с силами внутреннего сцепления материала (когезии), определяющими прочность старого и нового бетона. Кроме того, швы и трещины являются границами изменения направления температурно-усадочных деформаций стыкуемых конструкций, поэтому зона шва, разделяющая слои становится «предварительно напряжённой» растягивающими усилиями, провоцирующая сдвиг слоёв друг относительно друга.

Совмещение швов является обязательным во избежание растрескивания слоя усиления над швами усиливаемого слоя.

При усилении способом сращивания обязательным является очистка поверхности старого бетона от пыли, грязи, масла и строительного мусора и удаление с поверхности бетона верхнего пористого слоя вместе с карбонатной плёнкой. Этот слой имеет пониженную прочность вследствие преобладания в нём растворной части, повышенного водоцементного отношения по сравнению с

внутренними областями, в результате водоотделения и расслоения бетонной смеси, а так же наличия более рыхлой структуры матрицы из-за повышенной капиллярной пористости. Прочность верхнего слоя снижается, кроме этого, в результате выноса в него отделяющегося водой наиболее мелких частиц (шламов) составляющей бетонной смеси.

Удаление верхнего слабого растворного слоя с частичным обнажением крупного заполнителя, обеспечит адгезию слоёв и возможность организуемого межслойного шва воспринимать сдвигающие усилия. Этой же цели может способствовать и другие способы увеличения механического зацепления по площади бетона, работающего на сдвиг, например, создание искусственных неровностей с помощью фрезерования или дробеструйной обработки. Обязательным также является срезка или выравнивание имеющихся уступов между отдельными плитами. Рекомендуется также, при армировании слоя усиления стержневой арматурой, выполнить её укрепление на усиливаемом слое. Для предотвращения обезвоживания укладываемой бетонной смеси, существующее бетонное основание необходимо увлажнить.

При изготовлении слоя усиления рекомендуется использовать высокоподвижный бетон для заполнения всех неровностей на поверхности основания и для предотвращения образования не заполненных растворной частью “гнезд” между крупными фракциями заполнителя. Толщину и армирования слоя усиления следует назначать расчётом. При этом минимальную толщину слоя усиления необходимо определять в зависимости от максимального диаметра фракции крупного заполнителя по формуле:  $h_{мин} = 5(d_z + a_m)$ , где:  $d_z$  – диаметр заполнителя,  $a_m$  – средняя толщина одной прослойки матрицы. Для тяжёлого бетона, при использовании фракции щебня 5-20мм, толщина слоя, соответственно, составляет 100 – 120 мм. Для армирования слоёв усиления применяется стержневая арматура в виде сварных или вязаных сеток из арматуры периодического профиля, фибровая арматура или комбинированное армирование. Использование дисперсного армирования стальными фибрами дополнительно увеличивает адгезию слоёв, снижает объёмную усадку, повышает ударную и усталостную прочность, трещиностойкость и истираемость. Дополнительное применение низко модульных синтетических волокон повышает технологические свойства бетонной смеси и

снижает трещинообразование на ранних стадиях твердения бетона.

При усилении полов методом наращивания по разделительной прослойке не требуется обязательного совпадения швов в слоях.

В том случае, когда существующее бетонное основание имеет неровности, помимо разделительной прослойки устраивают выравнивающий песчаный или пескоцементный слой. При больших неровностях, рекомендуется выполнять выравнивающие слои из щебня или мелкозернистого бетона. Слои усиления выполняют в виде монолитных прямоугольных плит. Конструкция плит такая же, как для обычных бетонных, фибробетонных, армобетонных и железобетонных полов.

#### 4. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАСЧЁТА.

Конструкции бетонных полов рассчитываются по методу предельных состояний, позволяющему наиболее полно учесть специфику их работы под воздействием эксплуатационных нагрузок. При наступлении предельного состояния конструкция не способна сопротивляться внешним воздействиям или получает недопустимые, по условиям эксплуатации, деформации. Задача расчета состоит в том, чтобы обеспечить запас по прочности и трещиностойкости, для предотвращения наступления, в период эксплуатации, того или иного предельного состояния. Вместе с тем, для получения экономичных решений, эти запасы не должны быть лишними, т.е. необходимо учитывать условия, при которых возникающие усилия оказывались максимально близкими к предельно допустимым значениям.

Расчетные предельные состояния для различных типов конструкций полов отличаются. При появлении трещин в бетонных полах их несущая способность практически исчезает. Поэтому, для таких конструкций, состояние, соответствующее появлению трещин в результате воздействия нагрузок, является расчетным и характеризуется как предельное состояние по прочности. В железобетонных конструкциях полов, в стадии эксплуатации трещины допускаются, но ограничивается ширина их раскрытия. Расчетным предельным состоянием для таких плит является предельное состояние по прочности, которое наступает, когда напряжения в растянутой арматуре достигают его расчетного значения, а предельное состояние по раскрытию трещин, характеризуется шириной их раскрытия не более **0,4** мм, определяемое различными условиями.

Расчётное предельное состояние сталефибробетонных конструкций полов зависит от прочности бетона – матрицы и параметров фибрового армирования; определяющим фактором, при этом, является объёмное содержание фибр в бетоне – матрице.

При проценте армирования ниже минимального уровня, усилия в сжатой и растянутой зонах до момента образования первой трещины воспринимаются фибробетоном, а момент образования трещины в растянутой зоне, соответствует потере элементом несущей способности и характеризуется как предельное состояние по прочности.

При проценте армирования выше минимального уровня, усилие, возникающее в сталефибробетонном изгибаемом элементе в момент возникновения трещин, воспринимается в сжатой зоне сталефибробетоном, а в растянутой - только фибрами, считающимися «размазанными» в пределах площади растянутой зоны. Предельное состояние по прочности характеризуется усилием, возникающим в момент обрыва или выдёргивания всех фибр пересекающих расчётное сечение.

Поскольку, рассмотренные выше предельные состояния вызываются действием знакопеременных изгибающих моментов, расчет необходимо производить с их учётом.

В связи с этим, основное уравнение прочности может быть записано в виде:

$$m_d < m_u \quad (1.1)$$

$m_d$  - расчетный момент в сечении плиты при наиболее невыгодном расположении и сочетании нагрузок;

$m_u$  - предельно допустимый для рассматриваемого сечения изгибающий момент.

При расчете железобетонных конструкций полов, с учётом раскрытия трещин, помимо условия (1.1), необходимо выполнить условие:

$$a_{crc} < [a_m] \quad (1.2)$$

$a_{crc}$  - расчётная ширина раскрытия трещин (мм), в рассматриваемом сечении плиты, при действии эксплуатационных нагрузок;

$[a_m]$  - предельно допустимая ширина раскрытия трещин, равная **0,4мм**.

Смысл формулы (1.1) состоит в том, чтобы максимально возможное (с учетом динамических нагрузок и коэффициента перегрузки) усилие в конструкции было не больше ее минимальной несущей способности (с учетом возможного изменения прочности материала). Расчет конструкций полов заключается в определении моментов  $m_d$  и  $m_u$ , расхождение между которыми должно быть не более 5%.

Изменение напряжённо - деформируемого состояния конструкций полов, являющимися плитами, лежащими на упругом основании, происходит в зависимости от величин прикладываемых нагрузок, реакции основания и характера армирования. Для различных типов конструкций необходимо учитывать различные стадии их работы.

В конструкциях **бетонных** полов, в отличии от свободно - опёртых балок и плит, следует различать следующие четыре стадии их работы:

**Стадия I** характеризуется тем, что в результате действия нагрузки возникает напряжение  $\sigma_p$ , меньшее абсолютного предела выносливости  $R'$ . За абсолютный предел выносливости обычно принимают значение, равное  $0,4 \cdot R_{btb}$ , которое, согласно гипотезе прочности бетона по О. Я. Бергу, гарантирует от появления микротрещин на границе сред (заполнителей и цементного камня). Считается, что при значении фактического напряжения больше  $R'$  могут возникать микротрещины, которые по мере увеличения напряжения «пронизывают» всё большую толщину плиты и охватывают всё больший объем материала.

**Стадия II** при которой развитие и накопление микроповреждений завершается, нагрузка возрастает до значения  $R'_{пред}$ , вызывающего напряжения в плите, равные пределу прочности бетона на растяжение при изгибе.

Подобное напряжение в бетонной балке вызывает мгновенное разрушение. В плите на упругом основании это приводит к появлению поверхностных трещин и перераспределению внутренних усилий.

В результате работа конструкции переходит в **III стадию** - стадию развития трещин.

Можно считать, что появление сквозных трещин, разделяющих плиту на несвязанные элементы, разрушает конструкцию, меняя ее форму. Однако, если при этом, основание испытывает напряжения в пределах, ограниченных его упругой работой, существенных прогибов не наблюдается и ровность поверхности не изменяется (не ухудшается). Требуется дополнительное увеличение нагрузки или числа циклов ее повторения, чтобы одни элементы плиты сместились по отношению к другим. Этот процесс отнесен к **IV стадии** – **стадии физического разрушения конструкции**.

Конструкций **железобетонных** плит полов, армированных ненапрягаемой арматурой, предусматривают три стадии их работы:

**Стадия I.** При малых нагрузках напряжения в бетоне и арматуре невелики и деформации носят преимущественно упругий характер; зависимость между напряжениями и деформациями линейная, и эпюры нормальных напряжений в бетоне сжатой и растянутой зон сечения треугольные.

С увеличением нагрузки напряжения в бетоне растянутой зоны сечения быстро приближаются к пределу прочности бетона при растяжении. При этом, в растянутой зоне сечения развиваются пластические деформации и эпюра напряжений искривляется, а в сжатой зоне бетон испытывает ещё преимущественно упругие деформации. Этот конечный этап стадии I переходит в стадию Ia. Эпюра напряжений в бетоне сжатой зоны близка по очертанию к треугольной, а в бетоне растянутой зоны – к прямоугольной.

При дальнейшем увеличении нагрузки бетон растянутой зоны разрывается в местах, где образовались трещины, и выключается из работы, растягивающие напряжения воспринимаются только продольной арматурой. Наступает новое качественное состояние – стадия II. При этом происходит изменение жёсткости сечения (в сторону его уменьшения) и, соответственно, уменьшение значений действующих изгибающих моментов, при учёте увеличения реактивных давлений основания. По высоте сечения деформации при изгибе изменяются нелинейно. По длине элемента деформации сжатой и растянутой зон сечения и высота сжатой зоны также переменные, а нейтральная ось волнообразная.

**Стадия II.** В растянутой зоне в местах, где образовались трещины, внутреннее растягивающее усилие воспринимается стальной арматурой. На участках между трещинами сцепление арматуры с бетоном не нарушается, и бетон продолжает работать на растяжение. Как и при центральном растяжении, по мере удаления от краёв трещин, растягивающие напряжения в бетоне увеличиваются, а в арматуре уменьшаются. В сжатой зоне с повышением напряжений и развитием ползучести бетона эпюра нормальных напряжений постепенно искривляется. При этом, одновременно, происходит увеличение значения реактивного давления упругого основания, что приводит к более плавному нарастанию внутренних усилий в плите по сравнению со статически определимыми системами.

При увеличении нагрузки происходит дальнейшее раскрытие трещин в растянутой зоне, напряжения в материалах увеличиваются, и наступает разрушение сечения, т.е. стадия III.

**Стадия III.** В этой стадии работы деформации ползучести бетона распространяются на значительную часть высоты сжатой зоны сечения, и

криволинейность эпюры нормальных сжимающих напряжений становится ярко выраженной. Разрушение сечения наступает, когда напряжение в растянутой арматуре достигает предела текучести  $R_a$ , а затем, под влиянием значительного прогиба плиты, разрушается сжатая зона или напряжения в бетоне сжатой зоны достигают предела его прочности. Напряжение в сжатой арматуре в том или другом случаях достигают предела текучести.

По мере удаления от расчётного центра приложения нагрузок имеются сечения, испытывающие различные стадии напряжённо-деформируемого состояния. Положение нейтральной оси в последовательных стадиях напряжённо-деформируемого состояния постепенно перемещается.

При изгибе железобетонных конструкций в отличие от упругих материалов вследствие ползучести бетона и раскрытия трещин в растянутой зоне зависимость между усилиями и деформациями в сечениях непостоянна: она изменяется с течением времени в зависимости от величины напряжений, повторяемости нагрузок, накопления остаточных прогибов и изменения реакции основания.

Работа **сталефибробетонных** конструкций полов отличается от работы бетонных и железобетонных и характеризуется следующими пятью стадиями:

**Стадия 1.** Стадия упругой работы композита, при которой фибра и бетонная матрица работают совместно, а напряжения в крайних волокнах растянутой зоны не достигают предела прочности матричного бетона на осевое растяжение. До появления первой микротрещины в растянутой зоне напряжённо-деформированное состояние бетонного пола и пола армированного стальной фиброй будет одинаковым, т.е. оба сечения работают в упругой стадии. Эпюра напряжений имеет треугольную форму. При дальнейшем возрастании нагрузок происходит переход в упругопластичную стадию (стадию 2).

**Стадия 2** характеризуется упругопластичной работой конструкции, при которой напряжение в крайних волокнах растянутой зоны достигают предела прочности матричного бетона на осевое растяжение и в нём развиваются пластические деформации, при этом, нейтральная ось начинает перемещаться вверх, эпюра сжатой зоны сечения треугольная, а растянутой зоны приобретает трапециевидное очертание. Вторая стадия соответствует моменту, предшествующему началу

образования трещин в растянутой зоне. При увеличении нагрузки происходит образование первой микротрещины и переход в третью стадию работы – стадию образования и развития трещин в матричном бетоне.

**Стадия 3** определяется появлением первой трещины в растянутой зоне, при этом, растягивающие усилия воспринимаются фибровой арматурой в вершине трещины и фибробетоном композитом в зоне над трещиной.

При дальнейшем росте нагрузок, в зоне максимальных напряжений в нижней части плиты, вызванных действием положительных изгибающих моментов, первичные микротрещины объединяются в макротрещины, которые начинают распространяться вверх по толщине плиты в радиальных направлениях. В образовавшихся трещинах вся нагрузка воспринимается фибрами, при этом, напряжения в них значительно увеличиваются, а напряжения в матричном бетоне в окрестности трещины снижаются по мере удаления от вершины трещины. Эпюра напряжений растянутой зоны становится прямоугольной. Характер распространения трещин определяется прочностью бетонной матрицы, материала фибры, её объёмным содержанием, коэффициентом ориентации, степенью анкеровки, а также количеством фибр пересекающей трещину в расчётном сечении. При дальнейшем возрастании нагрузок завершается процесс образования радиальных трещин в матричном бетоне с одновременным возникновением поверхностных тангенциальных трещин кольцевого очертания и переходом в 4-ю стадию – стадию вязкого течения и начала процесса разрушения плиты.

**Стадия 4** характеризуется достижением предельного состояния прочности сталефибробетонного сечения на растяжение при изгибе. В фазе наступления предела прочности сталефибробетонного сечения происходит взаимодействие (перераспределение) между положительными и отрицательными изгибающими моментами, определяемое как функция жесткости плиты пола и реакции основания, которые формируют напряжённо-деформируемое состояние конструкции плиты.

Дальнейшее развитие трещин происходит за счёт выдёргивания и разрыва волокон дисперсной арматуры последовательно по высоте сечения. Волокна разрываются, если прочность сцепления их с бетонной матрицей превосходит их прочность на растяжение, и выдергиваются, если прочность сцепления меньше прочности волокон.

В реальных условиях при разрушении всегда наблюдаются оба механизма, так как в дисперсно-армированных бетонах фибра располагается хаотично и площадь сцепления волокон с матрицей, регулируется глубиной их заделки в матрицу по отношению к фронту трещины. В элементах, армированных фибрами, длина которых меньше удвоенного значения необходимой длины их анкеровки после возникновения трещины возникает предельное напряжение сцепления фибр с последующим выдёргиванием фибр из бетона. При длине анкеровки фибр больше их удвоенной длины, часть пересекающих трещину фибр воспринимает действующую нагрузку, а напряжения в армирующем материале повышается до момента исчерпания несущей способности фибр. При этом, в отличие от бетонного сечения, в котором при образовании трещины в растянутой зоне несущая способность элемента исчезает, на диаграмме «напряжение-деформация» фибробетона наблюдается ниспадающий участок, учитывающий работу фибр после образования трещины, при условии контроля деформаций. Угол наклона ниспадающей кривой зависит от прочности бетон - матрицы и параметров фибрового армирования. При дальнейшем увеличении внешней нагрузки происходит переход в пятую стадию – стадию образования сквозных трещин и окончательного разрушения плиты.

В **Стадии 5** происходит сквозное пересечение радиальными и тангенциальными трещинами сечения плиты по всей её высоте с обрывом и выдёргиванием практически всех фибр, при этом, разрушение сталефибробетонной плиты завершается полностью с образованием отдельных фрагментов, ограниченных линиями образовавшихся радиальных и тангенциальных трещин. В стадии разрушения происходит изменение расчётной схемы плиты: вместо схемы бесконечной гибкой плиты, с нагрузкой, действующей на достаточном удалении от края, происходит переход к полу- и четверть бесконечной схеме, с образованием «консольных» участков и возникновением отрицательных изгибающих моментов вблизи трещин. При этом, происходит увеличение реактивных давлений, обуславливающих нелинейный характер изменения значений изгибающих моментов.

Многообразие условий, в которых эксплуатируются полы, позволяет считать допустимым для отдельных типов конструкций различные стадии их работы.

## 5. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ПРИНЦИПОВ РАСЧЁТА КОНСТРУКЦИЙ БЕТОННЫХ ПОЛОВ.

Вопросу конструирования и оценки прочности бетонных полов, в отечественной литературе уделяется относительно мало внимания, не соответствующее его значению. Определение вертикальных перемещений плит, лежащих на упругом основании, является первостепенной задачей, большое значение, при этом, имеет выбор расчётной модели основания при проектировании плит полов.

Выбор расчетной модели основания представляет большой практический интерес, так как, с одной стороны, модель должна отображать наиболее существенные особенности совместной работы плиты и грунтового основания, от чего зависит точность результатов расчета, а с другой, - не вызывать чрезмерную математическую сложность, затрудняющую решение практических задач по расчету плит при различных граничных и начальных условиях, видах воздействий и схемах загрузки. По существу этот вопрос сводится к выбору зависимости между реакциями, действующими со стороны основания на подошву плиты, ее прогибами и их производными.

Дифференциальное уравнение изгиба гибкой плиты постоянной толщины при статической вертикальной нагрузке и любой модели основания имеет вид:

$$D\nabla\nabla w(x, y) = q(x, y) - r(x, y) \quad (2.1)$$

где:  $D$  - цилиндрическая жесткость плиты;

$\nabla\nabla$  - оператор Лапласа четвертого порядка:

$$\nabla\nabla = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (2.2)$$

$w(x, y)$  - прогибы плит, считаемые малыми;

$q(x, y)$  - интенсивность вертикальной нагрузки;

$r(x, y)$  - интенсивность вертикальной реакции основания, выражение которой зависит от вида её модели.

Решая вопрос о выборе расчетной модели основания, ограничимся суждениями о следующих моделях: модель с одним коэффициентом постели

(винклеровская модель) и однородного, изотропного, линейно-деформируемого, идеально упругого полупространства (модель упругого полупространства).

Первая модель построена на следующих допущениях:

- основание считается упругим и линейно-деформируемым;
- касательными реакциями по подошве плиты пренебрегают;
- вертикальная интенсивность реакции на подошву пропорциональна ее прогибу в данной точке:

$$r(x, y) = c \cdot w(x, y) \quad (2.3)$$

где:  $c$  - коэффициент реакции основания (коэффициент постели).

Характерно, что основание по этой модели не обладает распределительной способностью, так как деформируется только в пределах плиты, там, где на него действует давление. Это противоречит опыту в случае грунтов, обладающих связностью частиц. Такие грунты в известной степени являются упругими сплошными средами, которые, при загрузке плиты, деформируются и за её пределами. Однако, деформации упругого основания, за пределами подошвы плиты, не всегда существенны для расчета самой плиты, поэтому данная модель упругого основания проста, особенно, если учесть часто возникающие случаи водонасыщенного состояния связанного и несвязанного грунта, когда они мало способны к деформациям за пределами подошвы плиты.

Следует отметить, что при испытании грунтов штампами большого диаметра почти не наблюдается влияние диаметра штампа на значение коэффициента постели. Плиты полов имеют значительную протяженность и малую жесткость, рассматриваемые как гибкие и поэтому опыты со штампами большого диаметра соответствует действительным условиям работы плит. Это и вызывает практический интерес к первой модели.

Во второй модели сплошного упругого полупространства вертикальные перемещения его поверхности  $w_0(x, y)$  определяются по формулам теории упругости, а именно по формуле Буссинеска, приводящей к следующей зависимости (рис. 2.1):

$$w_0(x, y) = \frac{1 - \mu_0^2}{\pi E_0} \int_0^a \int_0^b \frac{r(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \quad (2.4)$$

$E_o, \mu_o$  - модуль упругости и коэффициент Пуассона основания;

$a$  и  $b$  - интегральные размеры прямоугольной плиты в плане.

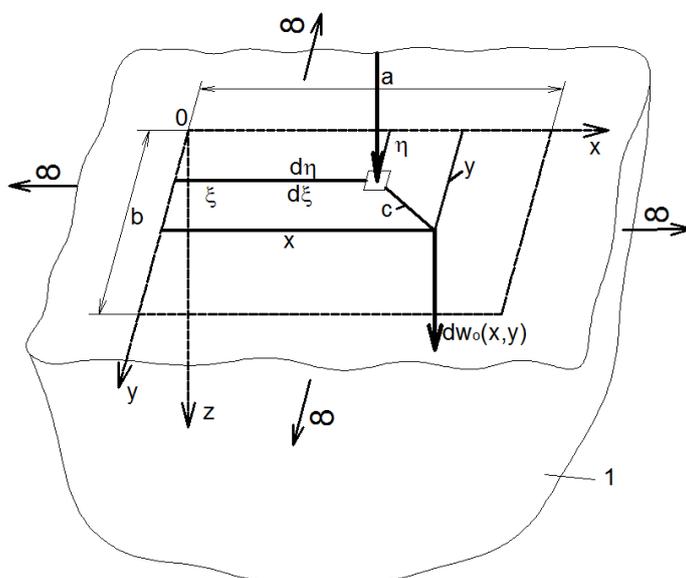


Рис. 2.1. Зависимость между реакцией основания и прогибами плиты по второй модели упругого основания. (1 – упругое полупространство).

Как видно из выражения (2.4), во второй модели учтены деформации поверхности основания, не только в месте приложения нагрузки, но и за её пределами. Для связных грунтов это вполне обосновано, и тем более естественно предположение, что реакция основания в данной точке, зависит не только от вертикального перемещения данного сечения, как в первой модели, но и от совокупности всех перемещений, включая угловые и сдвиговые. При этом, вторая модель учитывает деформации основания и за пределами подошвы плиты. Однако, если задача расчета плиты по первой модели сводится к решению одного дифференциального уравнения (2.1) при условии (2.3), то по второй модели необходимо решать систему двух уравнений (2.1) и (2.4) при учете условия полного контакта подошвы и основания:  $w(x, y) = w_o(x, y)$ . Поэтому математические трудности при использовании второй модели значительно превосходят сложность решения по первой модели.

Здесь уместно отметить, что по второй модели, деформации поверхности полупространства вокруг загруженного участка теоретически распространяются до бесконечности, что резко противоречит наблюдениям при экспериментах с

штампами, вдавливаемыми в поверхность основания даже для грунтов со значительной связностью частиц.

Существует более сложные модели, часто представляющие собой различные комбинации рассмотренных выше моделей, как, например: на упругое полупространство по второй модели опирается основание по первой модели, на котором располагается плита. Еще более сложные модели основания получаются для упруго - пластических оснований.

Необходимо особо отметить, что все упругие линейно - деформируемые основания считаются изотропными (двухсторонними), т.е. способными воспринимать как сжимающие напряжения, так и растягивающие. Такое допущение позволяет получать решения от нескольких одновременно действующих нагрузок путем суммирования частных решений от отдельных нагрузок. Однако, расчет при односторонних связях, существующих для грунтовых оснований, будет действителен в том случае, если в основании от всех нагрузок не возникнут растягивающие напряжения на подошве плиты. В противном случае, участок с растягивающими напряжениями должен быть исключен из рассмотрения. Но, при этом, появляются новые его границы. Путем последовательных приближений можно, наконец, получить приемлемый расчет, но он окажется сложным.

**Исходя из вышеизложенного, можно считать достаточно обоснованным, применение при проектирования бетонных полов первой модели – модели с одним коэффициентом постели.**

## **6. ОБОСНОВАНИЕ ПРИНЦИПОВ РАСЧЁТА КОНСТРУКЦИЙ ПОЛОВ НА ОСНОВЕ ГИПОТЕЗЫ КОЭФФИЦИЕНТА ПОСТЕЛИ.**

Определение внутренних усилий в плитах полов сводится к расчету плит, лежащих на многослойных грунтовых основаниях, при действии эксплуатационных нагрузок, приложенных к любому участку плиты. Плиты рассчитывают на действие статических нагрузок.

Динамическое воздействие нагрузок учитывают введением в расчет коэффициентов динамичности. Повторность приложения нагрузок, величина температурно-усадочных напряжений и нарастание прочности бетона во времени учитывается введением в расчёт коэффициента условия работы.

Плиты полов рассматриваются лежащими на упругом основании, свойства которого описываются принятой расчетной моделью. Исходя из этого, расчет необходимо производить исходя из условия (1.1).

Расчётные изгибающие моменты определяют в различных сечениях плиты с учётом задач строительной механики для плит, лежащих на упругом основании.

Определение внутренних усилий в плитах сводится к нахождению функции эпюр реактивного отпора (реакции) основания от заданной нагрузки. При этом обычно принимают, что осадка поверхности основания в точности совпадает с прогибами плиты под нагрузкой.

Конструкции промышленных бетонных полов, с точки зрения теории упругости, представляют собой плиту, неограниченных размеров, лежащую на упругом основании, разделённую различными типами швов на прямоугольные участки (плиты). С целью упрощения расчётов, определение действующих усилий и перемещений, в этом случае, сводится к решению задачи изгиба тонких прямоугольных плит в декартовых координатах для краевых участков и в полярных координатах для центральных полей плиты. В последнем случае, рассматривается задача об изгибе гибкой круглой плиты неограниченного радиуса, при действии сосредоточенной нагрузки, распределённой по малой площади, достаточно удалённой от краёв и углов плиты. Для нагрузок расположенных вблизи краевых и угловых участков плиты, рассматривают решения для полу- и четвертьбесконечных прямоугольных плит.

### 6.1. Решение для прямоугольных плит, лежащих на упругом основании.

Для прямоугольных плит условие изгиба нейтральной оси плиты выражается дифференциальным уравнением изгиба средней плоскости плит:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + p(x, y) = q(x, y) \quad (3.1)$$

где:  $D = \frac{E_\sigma h^3}{12(1-\mu^2)}$  - цилиндрическая жёсткость плиты;

$E_\sigma, \mu$  - модуль упругости и коэффициент Пуассона плиты;

$h$  - толщина плиты;

$w$  - прогиб плиты;

$x, y$  - координаты срединной плоскости плиты;

$p(x, y)$  - реактивный отпор упругого основания;

$q(x, y)$  - внешняя нагрузка.

В зависимости от положений в основу расчёта гипотезы о работе грунта в основании, вид функции  $p(x, y)$  может быть различным.

Действующий расчетный изгибающий момент в рассматриваемом сечении плиты определяется с учетом решений задач строительной механики для гибких прямоугольных плит, лежащих на упругом основании. Методология расчёта таких плит, при заданных граничных условиях, наиболее полно рассмотрена Б. Г. Галёркиным.

Вопросу расчёта плит на упругом основании, в разное время, посвящены работы А.П. Сеницына, Б.Г. Коренева, В.А. Киселева, М.И. Горбунова-Посадова, И.А. Медникова, Л.И. Манвелова и В.И. Травуша. На основе модели коэффициента постели Л.И. Манвеловым и Э.С. Бартошевичем получено решение для прямоугольной плиты при нагрузке, приложенной к любому участку в пределах ее контура, интегрированием дифференциального уравнения изгиба плиты (3.1) при соответствующих граничных условиях.

Дифференциальное уравнение изгиба прямоугольной плиты со сторонами  $a$  и  $b$  (Рис. 3.1) имеет вид:

$$\nabla^4 w + \frac{4}{S^4} w = p(x, y) \quad (3.2)$$

где,  $\nabla^4$  - бигармонический оператор;

$w$  – прогиб плиты;

$$S = \sqrt[4]{\frac{4D}{c}} = 1,41l; \quad l = \sqrt[4]{\frac{D}{c}} - \text{упругая характеристика плиты};$$

$c$  – коэффициент постели.

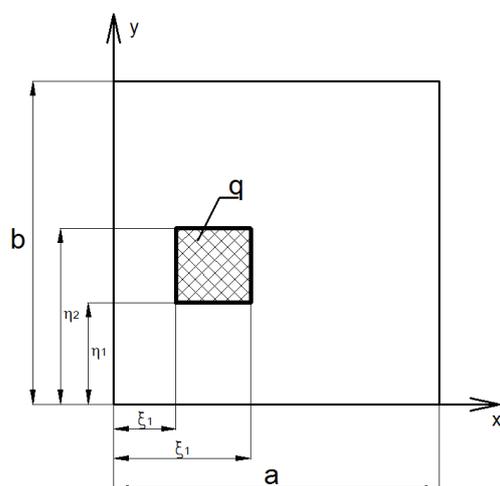


Рис. 3.1. Расчётная схема плиты.

Граничные условия для плит со свободными краями будут иметь вид:

$$x = 0; \quad M_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (3.3)$$

$$x = a; \quad Q_x = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$$

Соответственно, по краям плиты:  $y = 0$  и  $y = b$ ;  $M_y = Q_x = 0$ .

Для решения уравнения (3.2) с граничными условиями (3.3) применим метод разложения по собственным функциям; при этом собственные значения однородного дифференциального уравнения и собственные функции определяем вариационным методом. Следовательно, вместо уравнения (3.2) рассмотрим однородное уравнение:

$$\nabla^4 w + \frac{4}{S^4} w - \lambda w = 0 \quad (3.4)$$

Для определения собственных значений  $\lambda$  и собственных функций  $w$ , удовлетворяющих условию (3.4) и граничным условиям (3.3), рассмотрим

функционал:

$$y(w) = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ (\nabla^2 w)^2 + \left( \frac{4}{S^4} - \lambda \right) w^2 + 2(1 - \mu) \times \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy \quad (3.5)$$

Вариация этого функционала имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi'(0) = & \int_0^a \int_0^b \left[ \nabla^4 w + \frac{4}{S^4} w - \lambda w \right] \eta dx dy - \int_0^a \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \eta \int_0^b dy - \\ & - \int_0^a \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] \eta \int_0^b dx + \int_0^a \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} \int_0^b dy + \\ & + \int_0^a \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \frac{\partial \eta}{\partial y} \int_0^b dx = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из равенства (3.6) видно, что вариация функционала (3.5) удовлетворяет как дифференциальному уравнению (3.4), так и заданным граничным условиям (3.3).

Функцию  $w$  задаём в виде двойного ряда тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} w = \sum_m \sum_n \left( d_{\min} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + b_{\min} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} + c_{\min} \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + d_{\min} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Далее выражаем функционал (3.5) через заданную функцию (3.7), оставляем в тригонометрическом ряду 41 член и вычисляем все значения:

$$\frac{\partial y}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial c} = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial d} = 0; \quad (3.8)$$

В результате получаем системы линейных алгебраических уравнений, в результате решения которых определяем собственные значения и собственные функции  $w_i$ . Приложенную к плите нагрузку интенсивностью  $q$ , равномерно-распределённую по некоторой площадке, раскладываем в ряд по собственным функциям и определяем все коэффициенты разложения нагрузки  $q_i$ .

После этого решение дифференциального уравнения (3.2) с граничными условиями (3.3) имеет вид:

$$w = \sum \frac{q_i}{\lambda_i} w_i \quad (3.9)$$

Действующие изгибающие моменты определяются по известным формулам теории изгиба плит соответствующим дифференцированием выражения (3.9).

## 6.2. Случай для симметричного нагружения плиты.

**(Задача об изгибе круглой пластинки, нагруженной сосредоточенной силой, равномерно – распределённой по кругу и квадрату малой площади).**

Для случая симметричного нагружения плиты, относительно расчётного центра, к которым относятся полы производственных зданий, являющихся бесконечной гибкой плитой (пластиной) на упругом основании необходимо рассматривать вместо решения уравнения (3.1) в частных производных для прямоугольных плит, решения для бесконечной круглой плиты с осевой симметрией. В этом случае прогибы плиты зависят только от одного переменного – расстояния от центра симметрии (как правило расчётного центра нагрузок) до рассматриваемого сечения, т.е. появляется возможность решения данного уравнения более простым способом (в полярных координатах). Решение этого уравнения в данном случае упрощается: вместо достаточно сложного для практического решения задач уравнения (3.1) с частными производными решается обыкновенное дифференциальное уравнение с двумя неизвестными функциями:

$$D \left( \frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{dw}{dr} \right) = q(r) - kw \quad (3.10)$$

В частном случае пластинки, нагруженной в центре силой  $P$ , интенсивность  $q$  обращается в нуль по всей площади пластинки, за исключением центра.

Введя обозначение:

$$\frac{k}{D} = \frac{1}{l^4}, \quad (3.11)$$

приведём уравнение (3.10) к следующему виду:

$$l^4 \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 \varpi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varpi}{dr} \right) + \varpi = 0. \quad (3.12)$$

где:  $l$  – упругая характеристика плиты.

Для упрощения дальнейших выкладок удобно ввести безразмерные величины, воспользовавшись следующими обозначениями:

$$\frac{\varpi}{l} = z, \quad \frac{r}{l} = x. \quad (3.13)$$

Тогда уравнение (3.12) примет вид:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right) \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dz}{dx}\right) + z = 0. \quad (3.14)$$

Применив символ  $\Delta$  вместо

$$\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx},$$

напишем это уравнение таким образом:

$$\Delta \Delta z + z = 0. \quad (3.15)$$

Это – линейное дифференциальное уравнение четвёртого порядка, общее решение которого может быть представлено в следующем виде:

$$z = AX_1(x) + BX_2(x) + CX_3(x) + DX_4(x), \quad (3.16)$$

где  $A, \dots, D$  – постоянные интегрирования, а функции  $X_1, \dots, X_4$  представляют собой четыре независимых решения уравнения (3.15).

Попытаемся теперь найти решение уравнение (3.15) в виде степенного ряда. Пусть  $a_n x^n$  будет общий член этого ряда. Дифференцирование даёт нам тогда:

$$\Delta(a_n x^n) = n(n-1)a_n x^{n-2} + na_n x^{n-2} = n^2 a_n x^{n-2}$$

и

$$\Delta \Delta(a_n x^n) = n^2(n-2)^2 a_n x^{n-4}.$$

Для выполнения условий уравнения (3.15) необходимо, чтобы каждому члену  $a_n x^n$  в ряде соответствовал такой член  $a_{n-4} x^{n-4}$ , для которого было бы справедливо соотношение:

$$n^2(n-2)^2 a_n x^{n-4} + a_{n-4} x^{n-4} = 0. \quad (3.17)$$

При этом условии по подстановке ряда в уравнение (3.15) все его члены исчезают. Поэтому если этот ряд сходящийся, то он представляет собой частное решение уравнения (3.15). Из уравнения (3.17) следует, что:

$$a_n = -\frac{a_{n-4}}{n^2(n-2)^2}, \quad (3.18)$$

Заметив также, что

$$\Delta \Delta(a_0) = 0 \quad \text{и} \quad \Delta \Delta(a_2 x^2) = 0, \quad (3.19)$$

приходим к выводу, что имеются два ряда, удовлетворяющие уравнению (3.15), а именно:

$$\left. \begin{aligned} X_1(x) &= 1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \frac{x^{12}}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} + \dots \\ u \\ X_2(x) &= x^2 - \frac{x^6}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \frac{x^{14}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2 \cdot 14^2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Из обозначений (3.13) можно видеть, что при малых значениях расстояния  $r$ , т.е. для точек, близких к точке приложения нагрузки  $P$ , величина  $x$  мала и ряды (3.20) быстро сходятся. Мы видим также, что последовательные производные рядов (3.20) сохраняют конечное значение в точке приложения нагрузки ( $x = 0$ ). Это указывает на то, что одних этих рядов недостаточно для представления напряженного состояния в точке приложения нагрузки, где, как известно, изгибающие моменты становятся бесконечно большими.

По этим соображениям частное решение  $X_3$  уравнения (3.15) берется нами в следующем виде:

$$X_3 = X_1 \ln x + F_3(x), \quad (3.21)$$

Где  $F_3(x)$  – функция  $x$ , которую точно так же можно представить степенным рядом. Дифференцируя по  $x$  уравнение (3.21), находим:

$$\Delta \Delta X_3 = \frac{4}{x} \frac{d^3 X_1}{dx^3} + \ln x \Delta \Delta X_1 + \Delta \Delta F_3(x);$$

подставляя же  $X_3$  вместо  $z$  в уравнение (3.15), получаем:

$$\frac{4}{x} \frac{d^3 X_1}{dx^3} + \ln x (\Delta \Delta X_1 + X_1) + \Delta \Delta F_3(x) + F_3(x) = 0.$$

Поскольку  $X_1$  удовлетворяет уравнению (3.15) и может быть представлена первым рядом (3.20), получаем для определения  $F_3(x)$  следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta F_3(x) + F_3(x) &= -\frac{4}{x} \frac{d^3 X_1}{dx^3} = \\ &= -4 \left( -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot x^4}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^2} + \dots \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Взяв  $F_3(x)$  в виде ряда:

$$F_3(x) = b_4 x^4 + b_8 x^8 + b_{12} x^{12} + \dots \quad (3.23)$$

и подставив этот ряд в уравнение (3.16), определим коэффициенты  $b_4, b_8, b_{12}, \dots$  так, чтобы наше уравнение удовлетворялось. Заметив, что:

$$\Delta \Delta (b_4 x^4) = 4^2 \cdot 2^2 \cdot b_4,$$

и приравняв нулю сумму членов, не содержащих  $x$ , мы найдём, что

$$4^2 \cdot 2^2 \cdot b_4 = 4 \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2^2 \cdot 4^2}$$

или:

$$b_4 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2^4 \cdot 4^4} = \frac{3}{128}.$$

Приравнявая нулю сумму членов, содержащих  $x^4$ , находим:

$$b_8 = -\frac{25}{1769472}.$$

Далее будем иметь:

$$b_n = (-1)^{\frac{n-1}{4}} \frac{1}{n^2(n-2)^2} \left[ b_{n-4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \dots n^2} \right].$$

Таким образом, третье частное решение уравнения (3.15) будет иметь вид:

$$X_8 = X_1 \ln x + \frac{3}{128} x^4 - \frac{25}{1769472} x^8 + \dots \quad (3.24)$$

Подобным же способом мы найдем и четвертый частный интеграл  $X^4$  уравнения (3.15), положив:

$$\begin{aligned} X_4 &= X_2 \ln x + F_4(x) = \\ &= X_2 \ln x + 4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{4^4 \cdot 6^4} x^8 - \frac{1}{10^2 \cdot 8^2} \left( 4 \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{4^4 \cdot 6^4} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{4^2 \cdot 6^2 \dots 10^2} \right) x^{10} + \dots \end{aligned} \quad (3.25)$$

Подставив частные решения (3.20), (3.24) и (3.25) в выражение (3.16), получим общее решение уравнения (3.15) в следующем виде:

$$\begin{aligned} z &= A_1 \left( 1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \right) + \\ &+ A_2 \left( x^2 - \frac{x^8}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots \right) + \\ &+ A_3 \left[ \left( 1 - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^8}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} - \dots \right) \ln x + \frac{3}{128} x^4 - \frac{25}{1769472} x^8 + \dots \right] + \\ &+ A_4 \left[ \left( x^2 - \frac{x^8}{4^2 \cdot 6^2} + \frac{x^{10}}{4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot 10^2} - \dots \right) \ln x + \frac{5}{3456} x^6 - \frac{1054 \cdot 10^{-4}}{442368} x^{10} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Теперь остаётся лишь определить в каждом частном случае постоянные интегрирования  $A_1, \dots, A_4$  так, что бы удовлетворить граничным условиям.

Рассмотрим случай, когда контур круглой пластинки конечного радиуса  $a$  совершенно свободен (не опёрт).

Используя, для радиальных моментов выражение:

$$M_r = -D \left( \frac{d^2 \varpi}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{d\varpi}{dr} \right) = D \left( \frac{d\varphi}{dr} + \frac{\nu}{r} \varphi \right) \quad (3.27)$$

а для радиальных перерезывающих сил  $Q$  выражение:

$$\frac{d^3 \varpi}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \varpi}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\varpi}{dr} = \frac{Q}{D} \quad (3.28)$$

напишем граничные условия в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d^2 \varpi}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{d\varpi}{dr} \right)_{r=a} &= 0, \\ \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 \varpi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varpi}{dr} \right)_{r=a} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

В дополнение к этим двум уравнениям мы имеем ещё два условия, относящиеся к центру пластинки, а именно, что прогиб в центре пластинки должен иметь конечное значение, а сумма перерезывающих сил, распределенных по боковой поверхности бесконечно малого круглого цилиндра, вырезанного из пластинки в ее центре, должна уравновешивать сосредоточенную силу  $P$ . Первое из этих двух условий приводит нас к тому заключению, что постоянная  $A_3$  в общем решении (3.26) исчезает.

Второе условие дает:

$$\left( \int_0^{2\pi} Q_r r d\theta \right)_{r=a} + P = 0 \quad (3.30)$$

или, если воспользоваться обозначением (3.11),

$$-kl^4 \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 \varpi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varpi}{dr} \right)_{r=\varepsilon} 2\pi\varepsilon + P = 0, \quad (3.31)$$

где  $\varepsilon$  – радиус бесконечно малого цилиндра. Подставив в это уравнение  $lz$  вместо  $\varpi$  и воспользовавшись для  $z$  выражением (3.26), найдем, что при бесконечно малом значении  $x$ , равном  $\varepsilon/l$ , это уравнение сводится к равенству:

$$-kl^4 \frac{4A_4}{l_e} \cdot 2\pi\varepsilon + P = 0.$$

из которого следует, что:

$$A_4 = \frac{P}{8\pi kl^3}. \quad (3.32)$$

Имея значения постоянных  $A_3$  и  $A_4$ , мы можем найти из соотношений (3.29) и обе остальные постоянные  $A_1$  и  $A_2$ . При заданных размерах пластинки и известных модулях пластинки и основания эти соотношения приводятся к двум линейным относительно  $A_1$  и  $A_2$  уравнениям.

### 6.3. Использование функций Бесселя при решении задачи об изгибе круглой пластинки.

Общее решение (3.16) уравнения (3.15) может быть представлено также через функции Бесселя. С этой целью введём в уравнение (3.15) новую переменную  $\xi = x\sqrt{i}$ ; таким путем придем к уравнению:

$$\Delta'\Delta'z - z = 0, \quad (3.33)$$

в котором:

$$\Delta' = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi}.$$

Уравнение (3.33) эквивалентно уравнению:

$$\Delta'(\Delta'z + z) - (\Delta'z + z) = 0, \quad (3.34)$$

а следовательно, также и уравнению:

$$\Delta'(\Delta'z - z) + (\Delta'z - z) = 0. \quad (3.35)$$

Отсюда следует заключить, что (3.33) удовлетворяется решениями дифференциального уравнения Бесселя:

$$\Delta'z + z = \frac{d^2z}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dz}{d\xi} + z = 0, \quad (3.36)$$

и решениями уравнения:

$$\Delta'z - z = \frac{d^2z}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dz}{d\xi} - z = 0. \quad (3.37)$$

преобразующегося в (3.36) при подстановке в него  $\zeta_i$  вместо  $\xi$ . Поэтому совместное решение уравнений (3.36) и (3.37) можно записать в виде:

$$z = B_1 I_0(x\sqrt{i}) + B_2 I_0(xi\sqrt{i}) + B_3 K_0(x\sqrt{i}) + B_4 K_0(xi\sqrt{i}). \quad (3.38)$$

Здесь  $I_0$  и  $K_0$  – бесселевы функции соответственно первого и второго рода, от мнимого аргумента.  $B_1, B_2, \dots$  – произвольные постоянные. Поскольку аргумент  $x$  – вещественное число, все входящие в уравнение (3.38) функции имеют комплексный вид.

Для выделения вещественной части решения целесообразно ввести четыре новые функции, впервые использованные Кельвином и определяемые как:

$$\left. \begin{aligned} I_0(x\sqrt{\pm i}) &= \text{ber } x \pm \text{bel } x, \\ K_0(x\sqrt{\pm i}) &= \text{ker } x \pm \text{kel } x. \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Полагая, далее, что:

$$\begin{aligned} B_1 + B_2 &= C_1 l, & B_1 - B_2 &= -C_2 il, \\ B_3 + B_4 &= C_4 l, & B_3 - B_4 &= -C_3 il, \end{aligned}$$

где новые переменные  $C_1, C_2, \dots$  - вещественные числа, получаем следующее выражение для прогибов пластинки:

$$\varpi = C_1 \text{ber } x + C_2 \text{bel } x + C_3 \text{ker } x + C_4 \text{kel } x. \quad (3.40)$$

Все содержащиеся в нем функции табулированы и вещественны для вещественных значений аргумента. Для малых значений аргумента имеем:

$$\left. \begin{aligned} \text{ber } x &= 1 - \frac{x^4}{64} + \dots, \\ \text{bel } x &= \frac{x^2}{4} - \frac{x^6}{2304} + \dots, \\ \text{ker } x &= -\ln x + \ln 2 - \gamma + \frac{\pi x^2}{16} + \dots, \\ \text{kel } x &= -\left(\frac{x^2}{4}\right) \ln x - \frac{\pi}{4} + (1 + \ln 2 - \gamma) \frac{x^2}{4} + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

где:  $\gamma = 0,5772157\dots$  - постоянная Эйлера, а  $\ln 2 - \gamma = 0,11593\dots$ .

При больших значениях аргумента пользуются следующими асимптотическими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \text{ber } x &\sim \frac{e^\sigma}{\sqrt{2\pi x}} \cos\left(\sigma - \frac{\pi}{8}\right), \\ \text{bel } x &\sim \frac{e^\sigma}{\sqrt{2\pi x}} \sin\left(\sigma - \frac{\pi}{8}\right), \\ \text{ker } x &\sim \frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{\frac{2x}{\pi}}} \cos\left(\sigma + \frac{\pi}{8}\right), \\ \text{kel } x &\sim -\frac{e^{-\sigma}}{\sqrt{\frac{2x}{\pi}}} \sin\left(\sigma + \frac{\pi}{8}\right). \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

где:  $\sigma = \frac{x}{\sqrt{2}}$ .

Общее решение (3.40) можно использовать для исследования любого случая симметричного изгиба круглой пластинки, при опирании её на упругое основание. Четыре постоянные  $C_1 \dots C_4$ , соответствующие в наиболее общем случае четырем граничным условиям, определяются в каждом частном случае.

Ограничимся случаем бесконечно большой пластинки, несущей сосредоточенную нагрузку  $P$  в точке  $x = 0$ . Из четырех функций, составляющих решение (3.40), первые две функции неограниченно возрастают с увеличением аргумента, в соответствии с уравнениями (3.42); функция же  $\operatorname{ker} x$  принимает бесконечно большое значение в начале, как это мы можем заключить из уравнений (3.41). Положив поэтому  $C_1 = C_2 = C_4 = 0$ , приводим решение (3.40) к виду:

$$\varpi = C_3 \operatorname{ker} x. \quad (3.43)$$

Для определения постоянной  $C_3$ , вычислим из уравнений (3.41) перерезывающую силу:

$$Q_r = -\frac{D}{l^3} \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 \varpi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\varpi}{dx} \right) = \frac{C_3 D}{l^3} \left( \frac{1}{x} - \frac{\pi x}{8} + \dots \right). \quad (3.44)$$

С уменьшением  $x$  величина  $Q_r$  стремится к  $C_3 D / l^3 x = C_3 D / l^2 r$ . С другой стороны, при равномерном распределении нагрузки  $P$  по окружности радиуса  $r$  имеем  $Q_r = -P / 2\pi r$ . Приравнявая оба эти полученные для  $Q_r$  выражения, находим:

$$C_3 = -\frac{Pl^2}{2\pi D}. \quad (3.45)$$

Подстановка  $C_3$  в уравнение (3.43) дает полное решение задачи Герца в виде:

$$\varpi = -\frac{Pl^2}{2\pi D} \operatorname{ker} x, \quad (3.46)$$

и соответствующая реакция основания определяется как:

$$p = k\varpi = \frac{\varpi D}{l^4}. \quad (3.47)$$

В начале координат  $\operatorname{ker} x = -\pi/4$ , и прогиб под нагрузкой достигает максимального значения:

$$\varpi_{\max} = \frac{Pl^2}{8D}. \quad (3.48)$$

Для реакции основания в той же точке находим:

$$P_{\max} = \frac{P}{8l^2}. \quad (3.49)$$

Положительные моменты, бесконечно большие в начале координат (в точке приложения силы), уже на небольшом расстоянии от точки приложения нагрузки легко поддаются вычислению с помощью функции  $\text{kei } x$ , взятой в форме (3.41). Введя значения прогиба из (3.46) в формулы (3.27) и (3.28), приходим к результатам:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{P}{4\pi} \left[ (1+\nu) \left( \ln \frac{2l}{r} - \gamma \right) - \frac{1}{2}(1-\nu) \right], \\ M_t &= \frac{P}{4\pi} \left[ (1+\nu) \left( \ln \frac{2l}{r} - \gamma \right) + \frac{1}{2}(1-\nu) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

Сопоставление только что полученных выражений с уравнениями для радиальных и тангенциальных моментов для концентрированно нагруженной пластины убеждает в том, что напряженное состояние пластинки близ точки приложения нагрузки, как в теории Герца, так и для свободно опертой круглой пластинки радиуса  $a=2le^{-\nu}=1,123l$ , тождественно, если исключить момент  $M'_r = M'_t = -\frac{P}{8\pi}(1-\nu)$ , который следует наложить на моменты для круглой пластинки.

Рассмотрим теперь случай, когда нагрузка  $P$  распределена по площади круга радиуса  $c$ , малого радиуса в сравнении с  $l$ . Изгибающие моменты в центре круглой пластинки, несущей такую нагрузку, равны:

$$M_r = M_t = \frac{P}{4\pi} \left[ (1+\nu) \ln \frac{a}{c} + 1 \right]. \quad (3.51)$$

Введя в уравнение (3.51) подстановку  $a=2le^{-\nu}$  и добавив момент  $M=-P/8(1-\nu)$ , найдем для центра загруженного круга бесконечно большой круглой пластины изгибающие моменты:

$$M_{\max} = \frac{(1+\nu)P}{4\pi} \left( \ln \frac{2l}{c} - \gamma + \frac{1}{2} \right) \quad (3.52)$$

или

$$M_{\max} = \frac{(1+\nu)P}{4\pi} \left( \ln \frac{l}{c} + 0,616 \right). \quad (3.53)$$

В случае высокой концентрации нагрузки значения напряжений при вычислении их из уравнения (3.53) подлежат исправлению средствами теории толстых пластин.

При равномерном распределении нагрузки по площади малого прямоугольника мы можем поступить следующим образом. Эквивалентом квадратной площади, например, является круг радиусом  $c=0,57 u$ , где  $u$  – длина стороны квадрата. Подставив это в уравнение (3.53), получим:

$$M_{\max} = \frac{1+\nu}{4\pi} P \left( \ln \frac{l}{u} + 1,177 \right). \quad (3.54)$$

Влияние любой произвольной группы сосредоточенных нагрузок на прогибы неограниченной пластинки можно определить, суммируя прогибы, производимые каждой нагрузкой в отдельности.

### 6.3. Решения, для краевых загрузжений плит.

В расчетах Л.И.Манвелова и Э.С.Бартошевича, помимо плит со свободными краями, рассмотрены также следующие граничные условия: с двух сторон плиты - свободные края, с двух противоположных сторон шарнирные соединения; шарнирные соединения со всех сторон плиты. Б.Г.Коренев рассмотрел случаи работы плит вблизи швов для изолированной и неизолированной конструкций, используя метод компенсирующих нагрузок.

В расчетах трение в сквозных швах (на свободных краях) не учитывается. При выводе формул использованы многочисленные экспериментальные данные. Учитывая трудности учета действительной податливости разного рода соединений плит (штыри, шпунт), вызванных наличием зазора и люфтов, расчетная величина моментов или прогибов для всех типов соединений принимается одинаковой.

Формулы прогиба и изгибающих моментов позволяют рассчитывать плиты при нагрузке, приложенной к любому участку. Однако, математическая сложность задачи не даёт возможность получить простые, для практического применения, формулы.

С целью облегчения разработанного метода было проведено большое количество числовых расчетов плит при нагрузке, приложенной к различным их участкам, на основе которых получены коэффициенты, представляющие собой

отношения расчетных изгибающих моментов в различных точках плиты к максимальному изгибающему моменту в ее центре. Это позволило определить внутренние усилия в плитах следующим образом: вначале плиту рассчитывают на нагрузку, приложенную к центру плиты (на определенном расстоянии от края), то есть, на т.н. нагрузку «простого вида», равномерно-распределённую по следу, центр тяжести которой совпадает с рассматриваемым сечением (расчётным центром). При этом, определяются изгибающие моменты, возникающие в рассматриваемой точке (расчётном центре). В случае действия нескольких нагрузок, приложенных вблизи расчётного центра, рассматривается нагрузка т.н. «сложного вида» и расчёт производят на действие каждой из нагрузок, приложенной в центре тяжести элементарной площадки в отдельности, с последующим суммированием полученных усилий в расчетном центре, руководствуясь принципом Сен-Венана - независимости действия сил. За расчетный центр принимают наиболее нагруженный или невыгодно расположенный след, исходя из условия получения наибольшего значения изгибающего момента (рис .3.2):

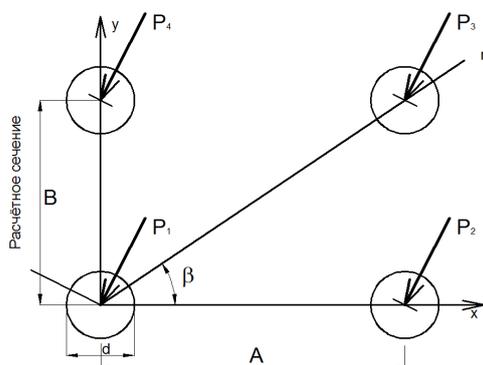


Рис. 3.2. Схема расположения нагрузок.

Достаточно большие размеры плит, применяемые в практике строительства полов, дают возможность рассчитывать их на центрально приложенную нагрузку как плит неограниченных размеров.

После того, как определены изгибающие моменты от нагрузки, приложенной в центре, определяются расчетные изгибающие моменты при самых невыгодных случаях приложения нагрузки к различным участкам плиты. Это достигается умножением значения максимального момента от центрально-приложенной нагрузки на соответствующие переходные коэффициенты  $k$ , представляющие собой отношения расчётных изгибающих моментов в рассматриваемых сечениях к

максимальному изгибающему моменту в центре плиты.

При этом рассматриваются следующие зоны (участки) плиты:

*Зона 1.* Центральная зона плиты при действии нагрузки на внутреннюю область плиты. Расстояние от нагрузки до края плиты (или оси шва) более  $1,2L$ , где  $L$  – упругая характеристика плиты:

$$L = \sqrt[4]{\frac{B}{K_s}} \quad (3.10)$$

*Зона 2.* Зона плиты вблизи швов со стыковыми (штыревыми или шпунтованными соединениями, или, для армированных стержневой арматурой плит с пересечением швов арматурой сечения плиты равной по параметрам армирования штыревому соединению при действии нагрузки на расстоянии от края менее  $1,2L$ ;

*Зона 3.* Зона плиты вблизи т.н. «ложных» швов, устраиваемых без стыковых соединений, при действии нагрузки на расстоянии от оси шва менее  $1,2L$ ;

*Зона 4.* Свободный край плиты. Расстояние от нагрузки до края плиты менее  $1,2L$ .

*Зона 5.* Свободный угол плиты. Расстояние от нагрузки до двух краёв плиты, образующих угол со стороной менее  $1,6L$ .

На основании выполненных теоретических и экспериментальных исследований установлены следующие переходные коэффициенты « $k$ » от изгибающего момента при центральном загрузении к максимальным моментам при загрузении плиты в различных зонах:

- для положительных изгибающих моментов:

$$k = 1,2 \text{ для зоны «2»};$$

$$k = 1,3 \text{ для зоны «3»};$$

$$k = 1,5 \text{ для зоны «4»};$$

- для отрицательных изгибающих моментов:

$$k = 0,45 \text{ для зоны «1»};$$

$$k = 0,75 \text{ для зоны «2»};$$

$$k = 0,82 \text{ для зоны «3»};$$

$$k = 0,95 \text{ для зоны «4»};$$

$$k = 2,7 \text{ для зоны «5»};$$

Для расчёта бетонных или сталефибробетонных конструкций полов достаточным будет рассмотрение действия только положительных моментов для зон «1», «2», «3» и отрицательного момента для зоны «5». Ввиду того, что, как правило, нагрузки располагаются на некотором удалении от краёв плиты (стен здания), практически для расчёта большинства типов полов необходимо учитывать только зоны «1», «2», «3».

Основное достоинство рассмотренного метода заключается в простой, в математическом отношении, возможности определения усилий при расположении нагрузок в определённых критических расчетных сечениях плиты - в углу и на краевых участках.

**Участки плиты, расположенные в промежуточных зонах, в большинстве случаев не представляют интереса с практической точки зрения.**

Ниже приведены формулы для расчета однослойных плит полов при использовании модели коэффициента постели.

Расчетные значения изгибающих моментов определяются по формуле:

$$M_d = k \cdot k_N \cdot M_{c,max} \quad (3.11)$$

$k$  - переходной коэффициент от изгибающего момента, при центральном загрузении плиты, к моменту при краевых и угловых загрузениях плиты.

$k_N$  - коэффициент, учитывающий накопление остаточных прогибов в основании;

$M_{c,max}$  - расчётный изгибающий момент в центре плиты пола, определяемый как сумма моментов от отдельных нагрузок по формуле:

$$M_{c,max} = M_0 + \Sigma M_i \quad (3.12)$$

$M_0$  - изгибающий момент в расчётном центре от нагрузки простого вида, равномерно-распределённой по следу, центр тяжести которого совпадает с расчётным центром и определяемый по формуле:

$$M_0 = P \cdot f(\alpha) \quad (3.13)$$

$P_p$  - расчётная нагрузка на след, центр которого совпадает с расчётным центром:

$$P_p = P_0 \cdot \gamma_{f,(d)}; \quad (3.14)$$

- $P_0$  - нормативная нагрузка на след;  
 $\gamma_f$  - коэффициент перегрузки при действии статической нагрузки  
 $\gamma_{(d)}$  - коэффициент динамичности при действии динамической нагрузки;  
 $f(\alpha)$  - функция, значения которой принимают в зависимости от соотношения сторон прямоугольного следа ( $a_r, b_r$ ) или приведенного радиуса ( $R_r$ ):

$$f(\alpha) = F [R, (a_r, b_r)]/L \quad (3.15)$$

Значение функции  $f(\alpha)$  определено исходя из решения Б.Г.Коренева для изгибающего момента в центре плиты на упругом основании, отвечающего гипотезе коэффициента постели:

$$M_u = P \cdot L \cdot (0,096 \cdot \sqrt{F} - 0,012 \cdot L) / F \quad (3.16)$$

где:  $L$  - упругая характеристика плиты;

$F$  - площадь следа нагрузки.

Отсюда, значение функции  $f(\alpha)$  при заданном уровне надёжности определяем по формуле:

$$f(\alpha) = k_p \cdot L \cdot (0,096 \cdot \sqrt{F} - 0,012 \cdot L) / F \quad (3.17)$$

М.И. Горбунов – Посадов так же получил решение для функции  $f(\alpha)$  интегрируя дифференциальное уравнение изгиба плит в полярных координатах, получив результаты в логарифмах:

$$f(\alpha) = k_p \cdot (0,0592 - 0,09284 \cdot \ln(R/L))$$

где:  $k_p$  - статистический коэффициент условий работы, принимаемый в зависимости от задаваемого уровня надёжности от 0,5 до 1,3. Для любых случаев, уровень надёжности изменяется от 0,5 до 1 и зависит от следующих факторов:

- толщины плиты;
- коэффициента вариации толщины плиты;
- амплитуды колебаний температуры на поверхности плиты;
- коэффициента вариации температуры на поверхности плиты;
- коэффициента вариации интенсивности нагрузок;
- коэффициента вариации числа приложений нагрузки;
- коэффициента вариации прочности и модуля упругости бетона;
- коэффициента вариации коэффициента постели.

Для плит полов, для которых характерны их толщина (от 0,15м до 0,25м), постоянная (положительная) температура на поверхности при их эксплуатации, предсказуемые значения и интенсивность эксплуатационных нагрузок, как правило, стабильныйстилающий слой основания и низкие значения коэффициентов вариации по используемым материалам, коэффициент условий работы варьируется от 0,5 до 0,6.

Значения функции  $f(\alpha)$  табулированы в нормативной и справочной литературе для нагрузки равномерно-распределённой по кругу или прямоугольному следу.

С учётом заданного характерного для полов коэффициента условий работы, функцию  $f(\alpha)$  для большинства случаев можно определить, представив её в виде полинома. Для нагрузки равномерно - распределённой по кругу в виде полинома 4-й степени:

$$f(\alpha) = A \cdot X^4 - B \cdot X^3 + C \cdot X^2 - D \cdot X + E \quad (3.18)$$

$X = R / L$  - переменный коэффициент полинома;

$R$  - радиус равновеликого отпечатка;

$A, B, C, D$  – постоянные полинома:

$$A = 0,3917; \quad B = 6,682; \quad C = 42,901; \quad D = 144,98.$$

Для нагрузки равномерно-распределённой по прямоугольному следу со сторонами  $a_r$  и  $b_r$ ,  $f(\alpha)$  представляется в виде полинома 3-й степени:

$$f(\alpha) = (-A) \cdot \alpha^3 + B \cdot \alpha^2 - C \cdot \alpha + D \quad (3.19)$$

где:  $\alpha, \beta, A, B, C, D$  - переменные коэффициента полинома;

$$\alpha = a_r / L;$$

$$\beta = b_r / L;$$

$$A = (-A1) \cdot \beta^3 + B1 \cdot \beta^2 - C1 \cdot \beta + D1$$

$$B = A2 \cdot \beta^3 + B2 \cdot \beta^2 - C2 \cdot \beta + D2$$

$$C = A3 \cdot \beta^3 + B3 \cdot \beta^2 - C3 \cdot \beta + D3$$

$$D = (-A4) \cdot \beta^4 + B4 \cdot \beta^3 + C4 \cdot \beta^2 - D4 \cdot \beta + E$$

$$A1 = 0,0003; \quad B1 = 0,0111; \quad C1 = 0,1328; \quad D1 = 0,5399;$$

$$A2 = 0,00004; \quad B2 = 0,0596; \quad C2 = 1,2827; \quad D2 = 6,7586;$$

$$A3 = 0,0182; \quad B3 = 0,0155; \quad C3 = 6,2658; \quad D3 = 42,138;$$

$$A4 = 0,001; \quad B4 = 0,0269; \quad C4 = 0,9914; \quad D4 = 25,685; \quad E = 141,72;$$

$A(n) - D(n), E$  - постоянные полинома.

$M_i$  - изгибающий момент в расчётном центре от сосредоточенной нагрузки  $P_i$ , приложенной в центре тяжести элементарной площадки, расположенной за пределами расчётного центра и определяемый по формуле:

$$M_i = K_4 \cdot P_i \quad (3.20)$$

$K_4$  – табулированный коэффициент, принимаемый в зависимости от отношения  $X_i/L$  и  $Y_i/L$ , где  $X_i$  и  $Y_i$  - координаты точек приложения нагрузок  $P_i$ , определяемые по схеме расположения нагрузок.

$L$  - упругая характеристика плиты (3.10)

$b$  – расчётная ширина сечения плиты, принимаемая равной  $l_m$ ;

$K_s$  – эквивалентный коэффициент постели подстилающего основания.

$P_i$  - нагрузка, приходящаяся на каждую элементарную площадку, расположенную вне расчётного центра, заменяемая эквивалентной сосредоточенной нагрузкой с точкой приложения в центре тяжести элементарной площадки.

$B$  – жёсткость сечения плиты; для бетонного и фибробетонного сечения величина « $B$ » определяется по формуле:

$$B = (E \cdot h^3) / (12 \cdot (1 - \mu^2)) \quad (3.21)$$

$E$  - модуль упругости бетона;

$h$  - высота сечения плиты;

$\mu$  - коэффициент Пуассона материала плиты (для бетона  $\mu \approx 0,2$ ).

Предельный изгибающий момент  $m_u$  для бетонных (неармированных) конструкций полов определяется (с учётом упруго-пластичного момента сопротивления) по формуле:

$$m_u = \gamma_c \cdot R_{bt} \cdot \frac{h^2}{3,5}; \quad (3.22)$$

$\gamma_c$  - коэффициент условий работы;

$R_{bt}$  - расчётное сопротивление бетона осевому растяжению;

Выше рассмотрен общий порядок расчёта конструкций бетонных полов, являющейся бесконечной гибкой плитой, лежащей на упругом основании. В современной проектной практике применяются различные, по типу армирования конструкции полов, расчёт которых, отличается как при определении действующих

усилий (изгибающих моментов), так и при расчёте несущей способности по первому или второму предельному состоянию, в зависимости от характера армирования конструкции плиты пола.

При расчёте действующих изгибающих моментов определяющим фактором является учёт жёсткости рассматриваемого сечения плиты. Жёсткость конструкций, лежащей на упругом основании, существенным образом определяет действительный характер её работы. По существу, характер изгибающих моментов и их величина зависят главным образом от соотношений жёсткости изгибаемой конструкции и основания. Уменьшение жёсткости конструкции, или, говоря точнее, отказ от её необоснованного преувеличения, приводит, как правило, к снижению усилий в конструкции, что приводит, во многих случаях, к заметной экономии. При этом, необходимо учитывать, что снижение жёсткости плиты ведёт к увеличению давлений на подстилающий грунт. Однако, учитывая относительную незначительность удельных давлений на грунт передаваемых плитами полов при действии эксплуатационных нагрузок влиянием увеличенного давления можно пренебречь, т.к. деформация основания происходит по начальному линейному участку диаграммы «напряжение - деформация» при весьма малых удельных давлениях, соответствующих упругой стадии работы грунта.

## 7. РАСЧЁТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ ПОЛОВ.

При расчёте железобетонных конструкций плит полов принимают, что при действии эксплуатационных нагрузок они работают, как правило, с раскрытием трещин в бетоне растянутой зоны. В сечениях с раскрывающимися трещинами растягивающие усилия воспринимает растянутая арматура и бетон в сжатой зоне. Наличие арматуры, пересекающей трещины, ограничивает глубину и ширину их раскрытия.

Расчётным предельным состоянием для железобетонных полов являются предельные состояния по прочности и по раскрытию трещин, которое может быть определено следующим условием:

$$M_d < M_u; \quad a_{crc} < 0,4\text{мм.} \quad (4.1)$$

$M_d$  - расчетный действующий изгибающий момент;

$M_u$  - предельный изгибающий момент воспринимаемый сечением;

$a_{crc}$  - ширина раскрытия трещины.

Расчётный изгибающий момент, необходимый для определения сечения арматуры, определяют расчётом плиты на действие нагрузок в трёх характерных точках: в центре плиты, у края и на углу. В первом случае наибольшие значения имеют положительные изгибающие моменты, по которым вычисляют сечение арматуры в нижнем сечении плиты.

В случае действия нагрузки у края плиты расчётом определяют сечение нижней арматуры, укладываемой параллельно краю и сечение верхней арматуры, перпендикулярное ему. По значению отрицательного изгибающего момента, возникающего в плите от действия нагрузки на угол, вычисляют общее сечение верхней арматуры пересекающейся в этом углу.

Расчётные значения изгибающих моментов в различных зонах плиты определяется по формуле:

$$M_p = k \cdot k_N \cdot M_{c,max} \quad (4.2)$$

$k$ ,  $k_N$ ,  $M_{c,max}$  - то же, что и в формуле (3.11)

Максимальный изгибающий момент при центральном загрузении плиты  $M_{c,max}$  определяют так же как и для бетонного сечения плиты:

$$M_{c,max} = M_0 + \Sigma M_i \quad (4.3)$$

Отличие в расчете от бетонных покрытий заключается в способе определения жесткости изгибаемых железобетонных плит. При определении жесткости железобетонные сечения нельзя рассматривать как однородные, так как в их растянутой зоне появляются трещины. Образование трещин вызывает снижение жесткости железобетонных плит. Таким образом, вследствие раскрытия трещин жесткость железобетонной плиты оказывается ниже жесткости бетонной плиты, равной по толщине.

Расчётная жёсткость железобетонной плиты пола определяется по формуле:

$$B = \frac{E_s A_s}{\psi_b} \left( h_0 - \frac{x}{3} \right) (h_0 - x) \quad (4.4)$$

$E_s$  - модуль упругости арматуры;

$E_b$  - начальный модуль упругости бетона;

$A_s$  - площадь сечения растянутой арматуры на единицу ширины сечения плиты;

$\psi_b$  - коэффициент, учитывающий работу бетона между трещинами в растянутой зоне и принимаемый равным при расчете по прочности - 0,2, по раскрытию трещин - 1;

$h_0$  - рабочая высота сечения (расстояние от сжатой грани сечения до центра тяжести растянутой арматуры):

$$h_0 = h - a - d/2; \quad (4.5)$$

$h$  - толщина плиты;

$a$  - толщина защитного слоя.

$x$  - высота сжатой зоны бетона в сечении:

$$x = (-\theta_0 + \sqrt{\theta_0^2 + 2\theta}) h_0 ; \quad (4.6)$$

$$\theta_0 = \frac{E_s \psi_c}{E_b \psi_b} \mu ; \quad (4.7)$$

$d$  - диаметр арматурных стержней;

$\psi_c$  - коэффициент, учитывающий неравномерность распределения деформаций крайнего волокна сжатой зоны сечения, на участке между трещинами и принимаемый в зависимости от отношения шага арматуры  $l_s$ , параллельной рассматриваемому сечению, к толщине

плиты  $h$ .

Значение коэффициента  $\Psi_c$  допустимо определять по формуле, представленной в виде полинома 2-й степени:

$$\Psi_c = A \cdot X^2 - B \cdot X + C; \quad (4.8)$$

$X$  – переменный коэффициент полинома;

$A, B, C$  – постоянные полинома:  $A = 0,1943$ ;  $B = 0,6914$ ;  $C = 1,085$

$\mu$  – коэффициент армирования:

$$\mu = \frac{A_s}{h_0}; \quad (4.9)$$

Предельный изгибающий момент железобетонных плит полов:

$$m_u = \gamma_c A_s R_s \left( h_0 - \frac{x}{2} \right) \quad (4.10)$$

Ширина раскрытия трещин в сечениях армированных стержневой ненапрягаемой арматурой:

$$a_{crc} = 1000 \frac{\sigma_s}{E_s} a_c \quad (4.11)$$

$\sigma_s$  – величина напряжения в растянутой арматуре:

$$\sigma_s = \frac{m_d}{A_s \left( h_0 - \frac{x}{3} \right)} \quad (4.12)$$

$a_c$  – расстояние между трещинами:

$$a_c = k_c \frac{A_s}{U_s} \frac{E_s}{E_b} \eta_1 \quad (4.13)$$

$U_s$  – периметр сечения арматуры, приходящейся на единицу ширины сечения плиты.

$$k_c = \frac{h^2 E_b}{3,5 A_s \left( h_0 - \frac{x}{3} \right) E_s} - 2 \quad (4.14)$$

$\eta_1$  – коэффициент, принимаемый равным: для стержневой арматуры периодического профиля – 0,7; для сварных сеток из холодноотянутой проволоки — 1,25.

## 7. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЁТА ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПЛИТ ПОЛОВ.

Особенностью предварительно напряженных конструкций плит полов является то, что в общем случае такая плита является анизотропной, причем учёт анизотропии плиты имеет решающее значение для правильного принятия основных конструктивных параметров пола. Ярко выраженной ортотропностью обладают однооснообжатые предварительно напряженные плиты с поперечной ненапряжённой арматурой. Поэтому в качестве расчетной схемы для предварительно напряжённых плит должна быть принята схема ортотропной плиты, лежащей на упругом основании. Так как основным расчётным случаем является случай расположения нагрузки в центральных зонах плиты, то за основу может быть принят метод расчета плиты неограниченных размеров. Положение нагрузки на углу плиты или у шва не является расчетным, так как эти элементы предварительно напряжённой плиты пола должны иметь конструктивное усиление, обеспечивающее его прочность не ниже прочности центральных полей плит. Для учета эффективности тех или иных способов усиления краев и углов плит пола необходимо пользоваться экспериментальными и расчётными данными. Основное условие расчета соответствует формуле (1.1).

Основы теории изгиба тонких анизотропных плит были заложены в работах Геринга и Буссинеска. Большой вклад в развитие этой теории сделан Губером и С.Г. Лехницким. Б.С. Раевым-Богословским получено решение для ортотропной плиты, лежащей на упругом основании, основные расчетные формулы которого приводятся ниже.

Известно, что если плита ортотропна и направления осей  $x$  и  $y$  совмещены с главными направлениями упругости, то уравнение ее изогнутой поверхности можно записать в следующем виде:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + cw = q(x, y) \quad (5.1)$$

где:

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \mu_1 \mu_2)}$$

$$D_2 = \frac{E_2 h}{12(1 - \mu_1 \mu_2)}$$

$$D_3 = D_1 \mu_1 + 2D_k \quad D_k = Gh^3 / 12$$

$D_1, D_2, D_3$  - жесткости изгиба и кручения для главных направлений;

$c$  - коэффициент постели упругого основания;

$E_1, E_2$  - модули упругости;

$\mu_1, \mu_2$  - коэффициенты Пуассона;

$G$  - модуль сдвига для главных направлений.

Нагрузка на плиту пола прикладывается в пределах площади контакта вертикальной нагрузки, равномерно-распределённой по следу опирания с плитой пола.

Таким образом, задача сводится к решению уравнения (5.1) для случая загрузки плиты нагрузкой, распределенной по контактной площади.

Для упрощения решения задачи первоначально рассматривают изгиб прямоугольной плиты с размерами сторон  $a$  и  $b$ , шарнирно опертыми краями. В этом случае решение уравнения (5.1) можно записать в виде двойного ряда Фурье:

$$w = \sum_m \sum_n a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.2)$$

Нагрузка  $q=f(x,y)$ , приложенная к плите, может быть разложена в аналогичный ряд:

$$q = \sum_m \sum_n q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.3)$$

Если считать, что нагрузка распределена по площади прямоугольника с координатами  $\xi_1, \xi_2$  и  $\eta_1, \eta_2$ , то:

$$q_{mn} = \frac{4q}{mn\pi^2} \left( \cos \frac{n\pi\xi_2}{a} - \cos \frac{m\pi\xi_1}{a} \right) \left( \cos \frac{n\pi\eta_2}{b} - \cos \frac{n\pi\eta_1}{b} \right) \quad (5.4)$$

Произведя необходимые преобразования, решение уравнения (5.1) можно записать в виде:

$$w = \frac{1}{\pi^4} \sum_m \sum_n q_{mn} \times \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{D_1 \frac{m^4}{a^4} + 2D_3 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + D_2 \frac{n^4}{b^4} + \frac{c}{\pi^4}} \quad (5.5)$$

Изгибающие моменты:

$$M_x = \frac{D_1}{\pi^2} \sum_m \sum_n q_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \mu_2 \frac{n^2}{b^2} \right) \times \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{D_1 \frac{m^4}{a^4} + 2D_3 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + D_2 \frac{n^4}{b^4} + \frac{c}{\pi^4}} \quad (5.6)$$

$$M_y = \frac{D_2}{\pi^2} \sum_m \sum_n q_{mn} \left( \frac{n^2}{b^2} + \mu_1 \frac{m^2}{a^2} \right) \times \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{D_1 \frac{m^4}{a^4} + 2D_3 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + D_2 \frac{n^4}{b^4} + \frac{c}{\pi^4}}$$

Полученные формулы являются общим решением прямоугольной ортотропной плиты с размерами  $a \times b$ , лежащей на упругом основании и нагруженной нагрузкой  $q$ , при условии, что ее края свободно оперты. Это решение имеет практическое значение для изучения работы плит, края которых опираются на мощные жесткие подкладки.

Чтобы преобразовать полученные формулы для решения бесконечной, плиты, достаточно принять  $a = b \geq 2\pi S$ , где  $S$  – упругая характеристика плиты, равная  $S = \sqrt[4]{\frac{4D}{c}}$ , а нагрузку расположить в центре плиты. Если ось  $x$  расположим вдоль направления жесткости  $D_1$  при  $D_1 > D_2$ , а нагрузку интенсивностью  $q$  приложим к центру плиты в пределах площади, ограниченной квадратом со стороной  $a$ , то в результате преобразования получим:

$$q_{mn} = \frac{16q}{mn\pi^2} (-1)^{(m+n)/2-1} \frac{\sin ma}{4S} \sin \frac{na}{4S} \quad (5.7)$$

при  $m = 1, 3, 5 \dots$  и  $n = 1, 3, 5 \dots$

Тогда для прогибов и изгибающих моментов непосредственно под нагрузкой формулы приобретают вид:

$$w = \frac{64D_1}{c} \sum_m \sum_n q_{mn} \frac{(-1)^{(m+n)/2-1}}{D_1 (64 + m^4) + 2D_3 m^2 n^2 + D_2 n^4} \quad (5.8)$$

$$M_x = 8D_1 \sqrt{\frac{D_1}{c}} \sum_m \sum_n q_{mn} \frac{(m^2 + \mu_2 n^2) (-1)^{(m+n)/2-1}}{D_1 (64 + m^4) + 2D_3 m^2 n^2 + D_2 n^4}$$

$$M_y = 8D_2 \sqrt{\frac{D_1}{c}} \sum_m \sum_n q_{mn} \frac{(n^2 + \mu_1 m^2) (-1)^{(m+n)/2-1}}{D_1 (64 + m^4) + 2D_3 m^2 n^2 + D_2 n^4}$$

при  $m = 1, 3, 5 \dots$  и  $n = 1, 3, 5 \dots$

В результате преобразования выражений (5.8) с использованием экспериментальных данных удалось получить простые зависимости для определения расчетных изгибающих моментов  $M_p$  в плитах:

$$M_p = M_{\max}^u k k_{x(y)}, \quad (5.9)$$

где:

$M_{\max}^u$  - максимальный изгибающий момент при центральном нагружении плиты;

$k$  - переходной коэффициент от изгибающего момента при центральном нагружении к моменту при краевом нагружении плиты, принимаемый равным: для монолитных железобетонных предварительно напряженных плит с двухосным обжатием при определении расчетного момента в продольном направлении (для поперечных сечений плиты)  $k = 1,2$ ; для монолитных железобетонных предварительно напряженных плит с одноосным обжатием бетона, а также с двухосным обжатием бетона при определении расчетного момента в поперечном направлении (для продольного сечения плиты)  $k = 1,0$ ;

$k_{x(y)}$  - коэффициент, учитывающий перераспределение внутренних усилий в ортотропных плитах покрытий с различной жесткостью  $D_x$  и  $D_y$  в продольном и поперечном направлениях; для изотропных плит с жесткостью  $D_x$  и  $D_y$   $k_{x(y)} = 1,0$ .

Расчётным предельным состоянием для предварительно напряженных конструкций является предельное состояние по образованию трещин. В результате расчёта должны быть определены толщина плиты, площадь поперечного сечения арматуры, величина предварительного напряжения в бетоне, при которых была бы полная гарантия отсутствия трещин в плите пола, т.е. чтобы предельное состояние не наступило.

Основное условие расчета предварительно напряженных плит по методу предельных состояний выражается формулой (1.1). Расчетный изгибающий момент в плитах однослойных плит определяют по формуле (3.11).

В монолитных предварительно напряженных плитах с одноосным обжатием в процессе эксплуатации допускаются продольные трещины, с возникновением которых жесткость плит в поперечном направлении снижается. Плита

становится ортотропной, изгибающий момент в продольном направлении возрастает, а в поперечном убывает в сравнении с изотропной плитой. Для плит, имеющих предварительное напряжение в одном направлении (продольном), а в другом направлении (поперечном) армированном ненапряженной арматурой в различных направлениях плиты, жесткость будет различная. Жесткость предварительно напряженных (поперечных) сечений:

$$D_y = 1,02E_\sigma \frac{bh^3}{12} \quad (5.1)$$

Жесткость продольных сечений, армированных ненапрягаемой арматурой, равна жесткости обычных железобетонных покрытий:

$$D_x = \frac{E_a F_a}{\psi_a} \left( h_0 - \frac{x}{3} \right) (h_0 - x) \quad (5.2)$$

Для плит с различной жесткостью (одноосно обжатых) максимальный изгибающий момент при центральном загрузении плиты принимается различным для продольных и поперечных сечений. Для поперечных сечений (предварительно напряженных) имеем:

$$M_{\max}^y = M_x = k_x \left( M_1 + \sum_2^N M_{x(y)}^i \right) \quad (5.3)$$

Для продольных сечений, армированных ненапрягаемой арматурой:

$$M_{\max}^y = M_y = k_y \left( M_1 + \sum_2^N M_{x(y)}^i \right) \quad (5.4)$$

где:

$k_x$  и  $k_y$  - коэффициенты, учитывающие перераспределение внутренних усилий в ортотропных плитах.

Значения  $k_x$  и  $k_y$  принимают в зависимости от отношения жесткостей  $D_y/D_x$ .

Для предварительно напряженных сечений предельный изгибающий момент определяют с учетом потерь напряжения арматуры от усадки бетона, релаксации стали от возможного изменения температуры в период между натяжением арматуры на упоры и бетонированием, а также от действия сил трения, возникающих при температурных деформациях плит.

Предельный изгибающий момент для предварительно напряженных сечений определяют по предельному состоянию, соответствующему стадии образования

трещин, с учетом работы бетона в растянутой зоне:

$$M_{np} = m[(R_{tn} - \sigma_{\text{бт}})W_0k_u + M_{об}^я] \quad (5.5)$$

где:

$m$  - коэффициент условий работы;

$R_{tn}$  - расчетное сопротивление растяжению при изгибе при расчете предварительно напряженных сечений по образованию трещин;

$\sigma_{\text{бт}}$  - величина потерь предварительного напряжения в бетоне от трения, принимаемая для монолитных полов равной 0,1 МПа на каждые 10 м длины напрягаемого участка;

$W_0$  - упругий момент сопротивления сечения, равный  $Bh^2/6$ ;

$k_u$  - коэффициент, учитывающий число приложений нагрузки;

$M_{об}^я$  - момент равнодействующей усилий в нижней и верхней напрягаемой арматуре относительно оси, нормальной к плоскости изгиба через ядровую точку, наиболее отдаленную от зоны сечения, трещинообразование которой проверяют исходя из условия:

$$M_{об}^я = m_T(F_n\sigma_n + F'_n\sigma'_n)(r_я \pm e_0) \quad (5.6)$$

где:  $m_T$  - коэффициент точности натяжения арматуры;

$F_n$  и  $F'_n$  - площади сечения напрягаемой арматуры, расположенной, в растянутой и сжатой зонах сечений;

$\sigma_n$  и  $\sigma'_n$  - предварительное напряжение в напрягаемой арматуре;

$r_я$  - расстояние от ядровой точки до центра тяжести сечения (для прямоугольных сечений  $r_я = h/6$ );

$e_0$  - эксцентриситет приложения равнодействующей усилий в напрягаемой арматуре относительно центра тяжести сечения (знак «плюс» перед  $e_0$  принимают в тех случаях, когда точка приложения равнодействующей усилий в напрягаемой арматуре и рассматриваемая зона сечения находятся по одну сторону от горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести сечения, и знак «минус», когда они находятся по разные стороны от оси):

$$e_0 = \frac{F_n \sigma_n Y_n - F'_n \sigma'_n Y'_n}{N_0} \quad (5.7)$$

$$N_0 = F_n \sigma_n + F'_n \sigma'_n$$

$Y_n$  и  $Y'_n$  - расстояние от горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести сечения до верхней и нижней арматуры;

$$\sigma_n = \sigma_0 - \sigma_{пн}; \quad \sigma'_n = \sigma'_0 - \sigma'_{пн} \quad (5.8)$$

$\sigma_0$  и  $\sigma'_0$  - предварительное напряжение (без учета потерь), соответственно, в нижней и верхней арматуре, принимаемое равным:

для стержневой арматуры:

$$\sigma_0 = \sigma'_0 = R_{ан} - \rho'$$

для арматуры из высокопрочной проволоки и прядей:

$$\sigma_0 = \sigma'_0 = 0,8R_{ан} - \rho'$$

$R_{ан}$  - расчетное сопротивление арматуры растяжению;

$\rho'$  - допускаемое отклонение величины предварительного напряжения арматуры, принимаемого по нормативным данным;

$\sigma_{пн}$  и  $\sigma'_{пн}$  - потери предварительного напряжения соответственно в нижней и верхней арматуре;

$$\sigma_{пн} = \sigma'_{пн} = \sigma_y + \sigma_p + \sigma_{плн} \quad (5.9)$$

$\sigma_y$ ,  $\sigma_p$  и  $\sigma_{плн}$  - потери предварительного напряжения арматуры от усадки бетона, релаксации напряжений и от ползучести бетона, определяемые по нормативным данным.

Предварительное напряжение в бетоне:

$$\sigma_\delta = \frac{\sigma_0 F}{bh} > \sigma_{\min} \quad (5.10)$$

где:

$F$  - площадь напрягаемой арматуры;

$b$  и  $h$  - ширина и высота сечения плит.

При армировании плит в поперечном направлении ненапрягаемой арматурой предельный изгибающий момент определяют как для обычных железобетонных сечений.

## 9. РАСЧЁТ СТАЛЕФИБРОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПОЛОВ.

Бетон, является структурно - неоднородным анизотропным материалом, обладающим относительно высокой прочностью на сжатие, плохо воспринимающий растягивающие усилия. При проектировании конструкций этот недостаток устраняется, как правило, благодаря включению в бетон стержневой (направленной) стальной арматуры, которая воспринимает возникающие растягивающие напряжения после образования трещин в крайних волокнах сечения растянутой зоны. Иногда предусматривается конструктивное армирование бетонного сечения, способное ограничить неконтролируемое развитие трещин или предотвратить его разрушение при действии случайных факторов.

Альтернативой стержневому армированию, при определённых условиях, может являться дисперсное армирование исходного бетона различными типами волокон (фибр); при этом, конструкция приобретает свойства нового композитного материала, называемого фибробетоном, характеризующегося наличием определённых свойств, отличных от неармированных или армированных стержневой арматурой бетонных конструкций.

В общем случае, фибробетоном называют композиционный материал, состоящий из цементной матрицы с крупным заполнителем или без него с равномерным или заданным распределением по её объёму ориентированных или хаотично расположенных дискретных волокон (фибр) различного происхождения и свойств.

Конструирование любого композиционного материала с целью придания ему необходимых свойств, базируется на принципах, сформулированных на основе определённых знаний структуры этого материала, принципах структурообразования и возможности регулирования его параметров путём воздействия на его структуру в рамках заданного технологического процесса. Теоретические основы расчёта прочности фибробетона как композитного материала в упругой стадии работы основывается на законе аддитивности (правило смеси). При этом, несущая способность фибробетона в данном контексте определяется исходя из более низких значений модуля упругости и уровня предельных деформаций матрицы по сравнению с этими же параметрами для армирующих волокон.

Разновидностью фибробетона является сталефибробетон, представляющий собой бетон – матрицу из тяжёлого или мелкозернистого бетона, в который, для достижения требуемых свойств, добавляются стальные фибры, равномерно распределенные по всему объему бетона. Совместная работа бетона и стальных фибр обеспечивается сцеплением по их поверхности и анкерровкой волокон в бетоне за счет их периодического профиля, кривизны в продольном и поперечном направлении, а также наличием анкеров на концах фибр.

Цели и назначения армирования стальной фиброй и обычного стержневого армирования различны. Стальные волокна добавляют в бетон, главным образом, для того, чтобы повлиять на механизм трещинообразования в бетоне. Присутствие стальных волокон в бетоне уменьшает риск образования и развития трещин при его усадке, а также обеспечивает частичное или полное сохранение несущей способности элемента конструкции после образования структурных трещин в бетон-матрице. Наличие стальной фибры в бетоне усиливает его способность к поглощению энергии при разрушении за счёт увеличения работы, которую необходимо затратить для образования новых поверхностей при образовании и развитии трещин.

Когда бетонный элемент находится под действием нагрузки, он деформируется, с образованием микротрещин, которые при дальнейшем возрастании нагрузки образуют макротрещины. Волокна, введенные в исходный бетон, в том числе, пересекают вершины образующихся трещин и замедляют их дальнейшее распространение, придавая бетону значительную остаточную прочность после образования трещин.

Кривая диаграммы «напряжение-деформация» для бетона, армированного стальными волокнами, после образования трещин имеет характерный ниспадающий участок, называемый деформационным разупрочнением, при этом прочность фибробетона на изгиб уменьшается с ростом его деформации после начала трещинообразования. Такой эффект присущ только композитным материалам, работа которых отличается от работы элементов, с направленным стержневым армированием, где после образования трещины в крайнем волокне растянутой зоны происходит значительное повышение сопротивления изгибу после начала трещинообразования, при условии, обеспечения уровня армирования выше

минимального.

Характер изменения свойств конструкций из сталефибробетона при разрушении зависит от того, что является контролирующим фактором - нагрузка или деформация.

Уменьшение прочности сталефибробетона при изгибе после образования трещины можно обосновать, если рассмотреть поведение свободно опертой балки, нагруженной сосредоточенной силой в её центре. При нагружении сталефибробетонной балки на нижней её поверхности образуются множественные микротрещины в пределах её центральной трети в отличие от бетонной балки, где образуется одна характерная трещина приблизительно в середине пролёта. Характер образования трещин в фибробетонной балке схож с трещинообразованием в железобетонной балке. В случае контролируемого уменьшения действующей нагрузки на фибробетонную балку, происходит деформационное разупрочнение с плавным развитием образовавшихся микротрещин, с постепенным уменьшением её несущей способности, в отличие от бетонной балки, где после появления первой трещины, пронизывающей всё сечение элемента, происходит мгновенное её разрушение. Параметры деформационного разупрочнения сталефибробетона также заметно отличается от параметров железобетона, который при деформации становится более «жёстким», за счёт увеличения напряжения в арматуре растянутой зоны после образования трещины в бетоне растянутой зоны. Для обеспечения дальнейшей деформации образца необходимо увеличить нагрузку с целью развития пластических деформаций в растянутой арматуре и в сжатой зоне бетона.

Испытания с контролем нагрузки не показывают никаких существенных различий в диаграммах «напряжение-деформация» свободно опертой балкой из неармированного бетона и сталефибробетона. Характер диаграммы для железобетонной балки армированной стержневой арматурой при возрастании нагрузки отличается от фибробетонной и бетонной балки наличием площадки текучести и способностью к дальнейшему деформированию при увеличении нагрузки.

Введение стальных фибр в бетон обеспечивает значительное повышение пластичности образца после образования трещин, что является неоспоримым

преимуществом при расчёте статически неопределимых систем, например, в многопролетных балках и в плитах, лежащих на упругом основании.

Особенности и преимущества использования сталефибробетона можно увидеть по поведению балки, с защемлёнными опорами (т.е. при ограничении вертикальных и горизонтальных перемещений).

Рассмотрим два равномерно - нагруженных геометрически идентичных бетонных образца балок, одна из которых изготовлена из сталефибробетона, а другая – из неармированного бетона, с заделкой на опорах. Напряжённо - деформируемое состояние обеих балок при работе в упругой стадии практически не отличается, до тех пор, пока изгибающий момент на опоре не достигнет предела прочности, который будет почти одинаковым для каждой балки.

Балка из неармированного бетона разрушится сразу же после появления первой трещины на опорах, так как величина сопротивления действующему изгибающему моменту на опорах быстро упадет до нуля, вызывая рост напряжений в пролете, превышающий прочность бетонного сечения на изгиб для свободно-опёртой однопролётной балки. Балка из фибробетона не разрушится при условии, что она имеет достаточную способность к перераспределению моментов с защемлённых опор на пролет, чтобы сохранить равновесие. Она разрушится, когда действующий изгибающий момент на опорах станет равным моменту в пролете.

Остаточный момент на опоре при разрушении определяется образованием пластического шарнира. Однако, увеличение прочности и пластичности многопролётной бетонной балки из дисперсно армированного бетона можно ожидать только в том случае, если процент армирования стальными фибрами будет выше необходимого минимального уровня.

Отсюда следует, что композиты на основе фибробетона можно использовать для частичной или полной замены стержневой арматуры в статически неопределимых балках и плитах, где при трещинообразовании происходит перераспределение изгибающих моментов. Необходимую величину сопротивления усилиям высоконапряженных участков фибробетонных элементов можно обеспечить дополнительным стержневым армированием. Использование фибробетона, оправдано для плит полов, лежащих на упругом грунтовом основании и для плит, опертых на малоподвижные свайные опоры, где значения изгибающих моментов

максимально на опорах. В этом случае напряжения перераспределяются, позволяя развиваться сетке трещин.

Применение фибрового армирования в конструкциях промышленных полов обеспечивает его преимущество по сравнению с неармированными и армированными стержневой арматурой конструкциями благодаря улучшению ряда технико-экономических показателей.

Экономическая эффективность сталефибробетонных конструкций по сравнению с железобетонными обуславливается за счёт:

- снижения трудоёмкости;
- снижения материалоёмкости;
- повышения долговечности;
- увеличения межремонтного ресурса;
- исключение недостатков присущих стержневому армированию.

В сопоставлении с конструкциями полов устраиваемых без фибрового или стержневого армирования улучшаются следующие свойства:

- удельная работа деформации разрушения;
- прочность на растяжение;
- ударная прочность;
- трещиностойкость;
- усталостная прочность;
- усадочные деформации;
- долговечность;
- межремонтный ресурс.

Улучшение свойств фибробетона зависит от параметров армирования: объёмного содержания арматуры, а также соотношения между параметрами фибрового армирования и параметрами структуры бетонной матрицы.

Фибробетонные конструкции по виду армирования рассматриваются как сталефибробетонные (СФБ) – при расчетном армировании только фибрами, равномерно распределенными по объему элемента или комбинированно армированные (сталефиброжелезобетонные) (СФЖБ) – при их армировании стальными фибрами, в сочетании со стержневой (направленной) арматурой.

Количество стальной фибры, добавляемой в бетон, назначается таким образом,

чтобы обеспечить значимое, планируемое и длительное улучшение требуемых свойств фибробетонных конструкций по сравнению с неармированным бетоном.

При конструировании фибробетонных элементов определяющим является величина минимально допустимого объёма содержания фибр в матричном бетоне.

При расчёте фиброармированных элементов на осевое растяжение в предельной стадии учитывается только работа фибр по аналогии с расчётом железобетона, учитывающего расчётное сопротивление стержневой арматуры на растяжение. При этом, хаотично распределённые по объёму элемента волокна приводятся к направленному путём учёта соответствующих коэффициентов, при условии возможности восприятия растягивающих усилий только фибрами, расчётное сопротивление на растяжение которых превышает расчётное сопротивление неармированного бетона. Данная ситуация реализуется при условии содержания фибр выше минимального уровня. В противном случае растягивающие усилия воспринимаются совместно бетоном и фибрами.

При изгибе, минимально допустимое содержание фибр в бетоне должно отвечать ситуации, при которой усилие, возникающее в сталефибробетонном изгибаемом элементе в момент предшествующий образованию трещин, могло бы быть воспринято в момент образования трещин в сжатой зоне сечением сталефибробетоном, а в растянутой - только фибрами, считающимися «размазанными» в пределах площади растянутой зоны.

Как правило, объёмное содержание фибр в конструкциях полов находится в пределах 20 – 40 кг/куб.м. (0,25% - 0,5%), что является армированием ниже минимального уровня. При расчёте предельных усилий в статически определимых системах (свободно опёртых балках и плитах) при данном проценте армирования расчёт производится до достижения усилия, которое способно воспринимать расчётное сечение в момент предшествующий образованию трещин. Расчёт плит полов, лежащих на упругом основании, учитывая реактивное давление основания, обеспечивающего перераспределение положительных и отрицательных изгибающих моментов, допускает предельное состояние, соответствующее усилию, которое может быть воспринято элементом в момент образования трещин в растянутой зоне даже при условии содержания фибр в бетоне ниже минимального

уровня. Расчёт, при этом, производится по условиям прочности и предельному значению изгибающего момента, соответствующего усилию, возникающему в момент образования трещин, по аналогии с расчетом железобетонных конструкций с учетом расчётных характеристик сталефибробетона.

Расчётным предельным состоянием для СФБ и СФЖБ полов являются предельные состояния по прочности и по образованию трещин, которое может быть определено следующим условиями:

$$M_d < M_u = M_{crc}; \quad (6.1)$$

$M_d$  - расчетный изгибающий момент;

$M_u$  - предельный изгибающий момент сталефибробетонного сечения;

$M_{crc}$  – предельный изгибающий момент (усилие) воспринимаемый элементом в момент образования трещин.

Расчётные значения изгибающих моментов в различных зонах плиты определяется по аналогии с бетонным и железобетонным сечениями по формуле:

$$M_d = k \cdot k_N \cdot M_{c,max} \quad (6.2)$$

где:  $k$ ,  $k_N$ ,  $M_{c,max}$  - то же, что и в формуле (3.11)

Максимальный изгибающий момент при центральном нагружении плиты  $M_{c,max}$  определяется так же как и для бетонного или железобетонного сечения плиты:

$$M_{c,max} = M_0 + \Sigma M_i \quad (6.3)$$

Расчётная жёсткость СФБ и СФЖБ сечения (при фибровом армировании ниже минимального уровня) может определяться по аналогии с бетонным сечением (3.18).

Различие в расчёте между бетонными, железобетонными и СФБ (СФЖБ) сечениями плит полов состоит в методике определения предельных усилий (изгибающих моментов). Предельные усилия, воспринимаемые фибробетонным сечением элемента определяются, исходя из следующих предпосылок:

- сопротивление сталефибробетона растяжению представляется напряжениями, равными  $R_{fbt}$  и равномерно распределенным по растянутой зоне сталефибробетона;

- сопротивление сталефибробетона сжатию представляется напряжениями, равными  $R_{fb}$  и равномерно распределенным по сжатой зоне сталефибробетона;
- деформации (напряжения) в стержневой арматуре определяют в зависимости от высоты сжатой зоны сталефибробетона;
- растягивающие напряжения в стержневой арматуре принимают не более расчетного сопротивления растяжению  $R_s$  ;
- сжимающие напряжения в стержневой арматуре принимают не более расчетного сопротивления сжатию  $R_{sc}$  .

Расчетные сопротивления сталефибробетона сжатию  $R_{fb}$  и растяжению  $R_{fbr}$  определяется в зависимости от класса по прочности на сжатие бетона - матрицы, геометрии и размеров сечения элемента.

При определении  $R_{fbr}$  различаются два случая:

- 1-й случай: сопротивление растяжению сталефибробетона исчерпывается из-за обрыва некоторого количества фибр и выдергивания остальных, что определяется условием:

$$\ell_{f,an} < \frac{\ell_f}{2}; \quad (6.4)$$

- 2-й случай: сопротивление растяжению сталефибробетона исчерпывается из-за выдергивания из бетона условно всех фибр, что определяется условием:

$$\ell_{f,an} \geq \frac{\ell_f}{2}. \quad (6.5)$$

В формулах (6.4), (6.5)  $\ell_{f,an}$  - длина заделки фибры в бетоне, обеспечивающая ее разрыв при выдергивании, определяемая по формуле:

$$\ell_{f,an} = \frac{\eta_f d_{f,red} R_{f,ser}}{R_{b,ser}}, \quad (6.6)$$

где:

$d_{f,red}$  - приведенный диаметр используемой фибры;

$R_{f,ser}$  – нормативное сопротивление растяжению фибр;

$\eta_f$  – коэффициент, учитывающий анкеровку фибры.

Если имеет место 1-й случай исчерпания сопротивления растяжению сталефибробетона, то величина  $R_{fbr}$  определяется по формуле:

$$R_{fbr} = m_1 \cdot \left[ K_T \cdot k_{or} \cdot k_p \cdot \mu_{fv} \cdot R_f \left(1 - \frac{\ell_{fan}}{\ell_f}\right) + 0,1 \cdot R_b \cdot (0,8 - \sqrt{2 \cdot \mu_{fv} - 0,005}) \right] \quad (6.7)$$

где:

$m_1$  – коэффициент условий работы для фибры;

$k_{or}$  – коэффициент ориентации, учитывающий ориентацию фибр в объеме элемента в зависимости от соотношения размеров сечения элемента и длины фибры;

$k_p$  – коэффициент, учитывающий вероятность пересечения фибрами расчётной плоскости;

$\mu_{fv}$  – коэффициент фибрового армирования по объему;

$K_T$  – коэффициент, определяемый по формуле:

$$K_T = \sqrt{1 - (1,2 - 80 \cdot \mu_{fv})^2}, \quad (6.8)$$

Если имеет место 2-ой случай исчерпания сопротивления растяжению сталефибробетона, величина  $R_{fbr}$  определяется по формуле:

$$R_{fbr} = m_2 \cdot R_b \cdot \left( K_T \cdot \frac{k_{or} \cdot k_p \cdot \mu_{fv} \cdot \ell_f}{8 \cdot \eta_f \cdot d_{f,red}} + 0,08 - 0,5 \cdot \mu_{fv} \right), \quad (5.9)$$

где:  $m_2$  – коэффициент условий работы, для фибры.

Расчетное сопротивление сжатию сталефибробетона  $R_{fb}$  определяется в зависимости от класса по прочности на сжатие бетона - матрицы, вида, размеров и прочности фибр, геометрии и размеров сечения элемента. Величина  $R_{fb}$  определяется по формуле:

$$R_{fb} = R_b + (\kappa_n^2 \cdot \varphi_f \cdot \mu_f \cdot R_f), \quad (6.10)$$

где:

$\kappa_n$  – коэффициент, учитывающий работу фибр в сечении, перпендикулярном направлению внешнего сжимающего усилия;

$\varphi_f$  – коэффициент эффективности косвенного армирования фибрами, вычисляемый по формуле:

$$\varphi_f = \frac{5 + L}{1 + 4,5L}, \quad (6.11)$$

где:

$$L = \frac{k_n^2 \cdot \mu_{fv} \cdot R_f}{R_b}. \quad (6.12)$$

Значение предельного изгибающего момента в сечении  $M_u$ , определяют по формулам:

- при фибровом армировании:

$$M_u = R_{fb} b x \cdot 0,5h \quad (6.13)$$

где,  $h$  – высота сечения (толщина плиты);

$b$  – ширина рассматриваемого сечения, принимаемого равной 1,0 м;

$x$  – высота сжатой зоны:

$$x = \frac{R_{fbr} \cdot h}{R_{fb} + R_{fbr}}; \quad (6.14)$$

- при комбинированном армировании:

$$M_u = R_{fb} b x \left( h - \frac{x}{2} - a \right) + R_{sc} A'_s (h - a' - a) - R_{fbr} b (h - x) \cdot \left( \frac{h - x}{2} - a \right); \quad (6.15)$$

где:

$a$  и  $a'$  – расстояние от центра тяжести растянутой (сжатой) арматуры до ближайшей грани сечения;

$R_{sc}$  – расчетное сопротивление арматуры сжатию для предельных состояний первой группы.

В правой части уравнения (6.15), при наличии стержневого армирования только в растянутой зоне 2-й член равен нулю.

Высоту сжатой зоны  $x$ , при этом, определяют из условия:

$$R_{sc} A'_s + R_{fb} b x = R_{fbr} b (h - x) + R_s A_s \quad (6.16)$$

где:  $A_s$ ,  $A'_s$  – площади сечения соответственно растянутой и сжатой арматуры.

В левой части уравнения (47) при наличии стержневого армирования только в растянутой зоне 1-й член равен нулю.

Изгибающий момент, воспринимаемый элементом до образования первой трещины, определяется из выражения, учитывающего совместную работу бетона-матрицы и фибр в сжатой и растянутой зонах. При этом, принимая во внимание упругопластический момент сопротивления, соответствующий неармированному бетону получим:

$$M = R_{fbt} \cdot W_{pt} = R_{fbt} \cdot b \cdot h^2 / 3,5 \quad (6.17)$$

где:

$$R_{fbt} = R_{bm} \cdot (1 - \mu_f) + \sigma_{ft} \cdot \mu_f \cdot k_{or} = R_{bm} \cdot (1 - \mu_f) + 2 \cdot n \cdot R_{bm} \cdot \mu_f \cdot k_{or} \quad (6.18)$$

отсюда: 
$$M = R_{bm} \cdot (1 - \mu_f + 2 \cdot n \cdot \mu_f \cdot k_{or}) \cdot b h^2 / 3,5 \quad (6.19)$$

Усилие, воспринимаемое элементом в момент образования трещин, составляет:

$$M_{crc} = R_{fb}^t \cdot A_{fb}^t \cdot z \quad (6.20)$$

где:  $n = E_f / E_b$

$$A_{fb}^t = b \cdot (h - x) \quad (6.21)$$

Плечо внутренней пары сил находится из условия:

$$z = (h - x)/2 + x/2 = h/2 \quad (6.22)$$

Положение нейтральной оси находим из условия:

$$R_{fb} \cdot b \cdot x - R_{fb}^t \cdot b \cdot (h - x) = 0 \quad (6.23)$$

Отсюда получаем:

$$x = (R_{fb}^t \cdot h) / (R_{fb} + R_{fb}^t) \quad (6.24)$$

Подставляя значение  $x$  в исходную формулу, получим:

$$M_{crc} = R_{fb}^t \cdot (1 - R_{fb}^t / (R_{fb} + R_{fb}^t)) \cdot (b \cdot h^2 / 2) \quad (6.25)$$

или: 
$$M_{crc} = ((R_{fb} \cdot R_{fb}^t) / (R_{fb} + R_{fb}^t)) \cdot (b \cdot h^2 / 2) \quad (6.25^*)$$

## **10. ПРОЕКТИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПОЛОВ.**

При необходимости устройства полов под особо тяжелые нагрузки от технологического оборудования, а также в случае необходимости усиления конструкции существующих полов, одним из наиболее распространенных решений являются многослойные плиты полов с различными вариантами армирования, обладающими большой долговечностью и допускающие широкое использование местных строительных материалов для сооружения нижних слоёв многослойных конструкций плит полов. Выполненные исследования показывают, что необходимая несущая способность многослойных плит может быть достигнута при оптимальном соотношении толщин слоёв и их прочностных параметров.

Наиболее полное использование прочности материалов достигается при определённом соотношении расчетных параметров слоев: их толщин, модулей упругости и других характеристик. При отклонении этих параметров от оптимального значения большая часть нагрузки будет восприниматься одним из слоев, а другие слои будут недогружены. Это приведет к снижению долговечности конструкции и, в ряде случаев, к неоправданным экономическим затратам.

Расчет многослойных конструкций полов с теоретической точки зрения представляет более сложную задачу, чем однослойных. Расчетные значения изгибающих моментов с достаточной надежностью можно определить путём решения контактной задачи слоистых систем. В связи со сложностью работы жестких многослойных конструкций под нагрузкой внутренние усилия (изгибающие моменты) и деформации (прогибы) плит определяются по расчетной схеме многослойной плиты на упругом основании при центральном (симметричном) расположении действующей сосредоточенной нагрузки. Несимметричное расположение нагрузки и влияние различных способов соединения плит между собой учитывают путем введения поправочных коэффициентов к значению напряжений и изгибающих моментов для центрального расположения нагрузки. Расчет многослойных систем в зависимости от способа соединения различных слоев необходимо вести применительно к одному из двух следующих случаев: с «нескрепленными» слоями и со «скрепленными» слоями.

Первый случай расчета находит применение при укладке каждого слоя по разделительной прослойке, допускающей сдвиг вышележащего слоя по нижнему слою.

Второй случай предусматривает сращивание верхнего слоя с нижним, исключающее возможность сдвигов одного слоя относительно другого. Когда верхний слой бетона надежно связан с бетоном нижних слоев, несущая способность многослойной системы практически не отличается от соответствующей монолитной. Расчетный момент может определяться по формулам для расчета однослойных плит исходя из приведённого значения характеристик многослойной конструкции. Поскольку в силу ряда технологических условий в большинстве случаев при устройстве полов получил наибольшее распространение первый способ, ниже рассматривается решение, когда слои не скреплены друг с другом. Отсутствие сцепления слоев друг с другом соответствует наиболее опасному случаю, что также идет в запас прочности и обеспечивает долговечность конструкции пола в целом.

Рассмотрим многослойную бесконечно протяженную в плане плиту, состоящую из произвольного числа слоев и лежащую на упругом полупространстве или на основании Винклера (рис 7.1). При расчете многослойных плит должно удовлетворяться условие (1.1) для каждого слоя.

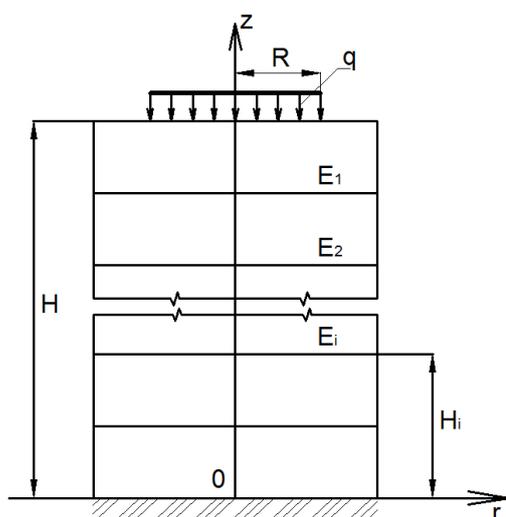


Рис. 7.1. Схема многослойной плиты на упругом основании.

Для определения расчетного изгибающего момента задача рассматривается в цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$ . Каждый слой плиты характеризуется

модулем упругости  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\mu_i$  и толщиной  $\Delta H_i$ .

Примем, что на верхнюю поверхность плиты действует равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью  $q = const$  по площади круга радиусом  $R$ . На нижнюю поверхность плиты действует реактивное давление со стороны упругого полупространства или винклеровского основания. Между слоями силы трения отсутствуют. Граничные условия для плиты, лежащей на упругом полупространстве, записываются в виде:

$$\begin{aligned} z = H; \quad \sigma_{zi} = -q; \quad -R \leq r \leq R; \\ \text{при} \quad \tau_{rzl} = 0; \quad -\infty < r < \infty; \\ z = H_i; \quad \sigma_{zi} = \sigma_{zi+1}; \\ \text{при:} \quad \tau_{rzl} = 0; \quad \tau_{rzi+1} = 0; \quad w_i = w_{i+1} \quad (i=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (7.1)$$

Граничные условия для плиты, лежащей на винклеровском основании, записываются в виде:

$$\begin{aligned} z = H; \quad \sigma_{zi} = -q; \quad -R \leq r \leq R; \\ \text{при} \quad \tau_{rzl} = 0; \quad -\infty < r < \infty; \\ z = H_i; \quad \sigma_{zi} = \sigma_{zi+1}; \quad -\infty < r < \infty; \\ \text{при} \quad \tau_{rzl} = 0; \quad \tau_{rzi+1} = 0; \quad w_i = w_{i+1} \quad (i=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} z = 0 \quad \sigma_{zN} = c w_N \\ \tau_{rzn} = 0 \end{aligned}$$

где:  $c$  – коэффициент постели,  $H_i$  – координата границы раздела  $i$ -го и  $i+1$  слоя.

Сформулированные задачи (7.1), (7.2) являются осесимметричными. Применяя способ суперпозиции нагрузок, эти задачи можно использовать для определения напряженно-деформированного состояния многослойной плиты при действии нескольких сосредоточенных нагрузок.

Деформации и перемещения многослойной плиты связаны известными зависимостями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \xi_\theta = \frac{u}{r}; \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Напряжения и перемещения для  $i$ -го слоя плиты должны удовлетворять следующей системе из двух дифференциальных уравнений равновесия в напряжениях:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{ri}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rzi}}{\partial z} + \frac{\sigma_{ri} - \sigma_{\theta i}}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rzi}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zi}}{\partial z} + \frac{\tau_{rzi}}{r} &= 0;\end{aligned}\quad (7.4)$$

и в перемещениях:

$$\begin{aligned}\Delta u_i - \frac{u_i}{r^2} + \frac{1}{1-2\mu_i} \frac{\partial l_i}{\partial r} &= 0 \\ \Delta w_i + \frac{1}{1-2\mu_i} \frac{\partial l_i}{\partial z} &= 0\end{aligned}\quad (7.5)$$

где,  $l_i = \frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{u_i}{r} + \frac{\partial w_i}{\partial z}$  - объёмное расширение в  $i$ -м слое.

Задачу теории упругости для многослойной плиты будем решать с помощью функций напряжения Лява  $\varphi_i$ . Можно легко убедиться, что системы уравнений (7.5) удовлетворяются, если напряжения и перемещения искать в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{ri} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_i \Delta \varphi_i - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r^2} \right) \\ \sigma_{\theta i} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_i \Delta \varphi_i - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r^2} \right) \\ \sigma_{zi} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2 - \mu_i) \Delta \varphi_i - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} \right] \\ \tau_{rzi} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ (1 - \mu_i) \Delta \varphi_i - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} \right] \\ u_i &= - \frac{1 + \mu_i}{E_i} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r \partial z} \\ w_0 &= \frac{1 + \mu_i}{E_i} \left[ 2(1 - \mu_i) \Delta \varphi_i - \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} \right]\end{aligned}\quad (7.6)$$

где функция напряжений  $\varphi_i = \varphi_i(r, z)$  удовлетворяет бигармоническому уравнению:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} \right) = \nabla^2 \nabla^2 \varphi_i = 0 \quad (7.7)$$

Оператор Лапласа  $\nabla$  представляет собой следующую величину:

$$\nabla = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (7.8)$$

Задача теории упругости для многослойного полупространства, в котором вместо винклеровского основания берут упругое однородное основание, рассмотрена в работе В. С. Никишина и Г. С. Шапиро.

Здесь и ниже используются результаты этой работы для построения решения рассматриваемой задачи о многослойной плите с нескреплёнными слоями, лежащей на упругом винклеровском основании под действием сосредоточенной нагрузки распределённой по кругу ограниченного радиуса.

С помощью интегрального преобразования Хенкеля функция интенсивности нормальной нагрузки представляется в виде:

$$p(r) = \int_0^{\infty} \alpha p(\alpha) I_0(\alpha r) d\alpha \quad (7.9)$$

где,  $p(\alpha)$  - трансформатор Хенкеля:

$$p(\alpha) = \int_0^{\infty} r p(r) I_0(\alpha r) d\alpha \quad (7.10)$$

$I_0(\alpha r)$  - функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Функция напряжения для  $i$ -го слоя плиты берётся в следующем общем виде:

$$\varphi_i = \int_0^{\infty} \left\{ [A_i(\alpha) + zB_i(\alpha)] e^{az} + [c_i(\alpha) + zD_i(\alpha)] e^{ar} \right\} I_0(\alpha r) d\alpha \quad (7.11)$$

Подставим функцию (7.11) в формулы (7.6) и проведём их дифференцирование, в результате получим следующие выражения для напряжений и перемещений:

$$\sigma_{ri} = \int_0^{\infty} \alpha^2 \left[ \Delta r_i(\alpha, z) I_0(\alpha, r) - \Delta u_i(\alpha, z) \frac{I_i(\alpha r)}{\alpha r} \right] d\alpha$$

$$\sigma_{\theta i} = \int_0^{\infty} \alpha^2 \left[ \Delta \theta_i(\alpha, z) I_0(\alpha, r) - \Delta u_i(\alpha, z) \frac{I_i(\alpha r)}{dr} \right] d\alpha$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zi} &= \int_0^{\infty} \alpha^2 \Delta z_i(\alpha, z) I_0(\alpha, r) d\alpha \\ \tau_{rzi} &= \int_0^{\infty} \alpha^2 \Delta \tau_i(\alpha, z) I_0(\alpha, r) d\alpha \\ \frac{E_i}{1 + \mu_i} u_i &= \int_0^{\infty} \alpha \Delta u_i(\alpha, z) I_i(\alpha, r) d\alpha \\ \frac{E_i}{1 + \mu_i} w_i &= \int_0^{\infty} \alpha \Delta w_i(\alpha, z) I_0(\alpha, r) d\alpha\end{aligned}\quad (7.12)$$

Здесь функции:  $\Delta r_i$ ,  $\Delta \theta_i$ ,  $\Delta z_i$ ,  $\Delta \tau_i$ ,  $\Delta u_i$ ,  $\Delta w_i$ , при  $i = 1, 2, \dots, N$  определяются по формулам В.С. Никишина и Г.С. Шапиро.

Для удобства решения задачи переходим от переменных  $r, z$  к безразмерным переменным  $\rho = r/R$ ,  $t = z/H$ .

Кроме этого, введём новые переменные интегрирования  $\beta = r\alpha$  и параметры:

$$\begin{aligned}\gamma_i &= H_i/H; \quad \lambda = H/R; \quad \delta_i = E_i/E_{i+1} \\ x_i &= \delta_i(1 + \mu_{i+1})(1 + \mu_i)\end{aligned}$$

Переходим также от переменных  $A_i, B_i, C_i, D_i$  к новым переменным  $\bar{A}, \bar{B}_i, \bar{C}_i, \bar{D}_i$

и получаем:

$$\begin{aligned}\bar{A}_i(\beta) &= \frac{\beta^2}{R^4} A_i\left(\frac{\beta}{R}\right) e^{\beta \lambda \gamma_{i-1}} \\ \bar{B}_i(\beta) &= \frac{\beta^2}{R^3} B_i\left(\frac{\beta}{R}\right) e^{\beta \lambda \gamma_{i-1}} \\ \bar{C}_i(\beta) &= \frac{\beta^2}{R^4} C_i\left(\frac{\beta}{R}\right) e^{-\beta \lambda \gamma_i} \\ \bar{D}_i(\beta) &= \frac{\beta^2}{R^3} D_i\left(\frac{\beta}{R}\right) e^{-\beta \lambda \gamma_i}\end{aligned}\quad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \quad (7.13)$$

Напряжения и перемещения в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ri} &= \int_0^{\infty} \beta \left[ \bar{\Delta}r_i(\beta, t) I_0(\rho\beta) - \bar{\Delta}u_i(\beta, t) \frac{I_1(\rho\beta)}{\rho\beta} \right] d\beta \\
 \sigma_{\theta i} &= \int_0^{\infty} \beta \left[ \bar{\Delta}\theta_i(\beta, t) I_0(\rho\beta) - \bar{\Delta}u_i(\beta, t) \frac{I_1(\rho\beta)}{\rho\beta} \right] d\beta \\
 \sigma_{zi} &= \int_0^{\infty} \beta \bar{\Delta}_{z_i}(\beta, t) I_0(\rho\beta) d\beta \\
 \tau_{rzi} &= \int_0^{\infty} \beta \bar{\Delta}_{\tau_i}(\beta, t) I_0(\rho\beta) d\beta \\
 u_i &= \frac{\Delta + \mu_i}{E_i} R \int_0^{\infty} \bar{\Delta}u_i(\beta, t) I_1(\rho\beta) d\beta \\
 w_i &= \frac{1 + \mu_i}{E_i} R \int_0^{\infty} \bar{\Delta}w_i(\beta, t) I_0(\rho\beta) d\beta
 \end{aligned} \tag{7.14}$$

В результате преобразования формул (7.6) – (7.14) получаем следующие замкнутые системы функциональных уравнений относительно функций  $B_i(\beta)$ ,  $D_i(\beta)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ),  $\bar{B}_{N+1}(\beta)$  и  $B_i(\beta)$ ,  $D_i(\beta)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), которые записываются в следующей матричной форме:

$$\begin{bmatrix} N_1^{(1,2)} \\ M_1^{(2,2)} & R_2^{(2,2)} \\ M_2^{(2,2)} & R_3^{(2,2)} & 0 \\ & \vdots \\ 0 & M_{N-1}^{(2,2)} & R_N^{(2,2)} \\ & & M_N^{(2,2)} & p_{N+1}^{(2,2)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta_1(\beta) \\ D_1(\beta) \\ \vdots \\ B_N(\beta) \\ D_N(\beta) \\ B_{N+1}(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(\beta) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.15}$$

$$\begin{bmatrix} N_1^{(1,2)} \\ M_1^{(2,2)} & R_2^{(2,2)} \\ & M_2^{(2,2)} & R_3^{(2,2)} & 0 \\ & & \ddots \\ & & & M_{N-1}^{(2,2)} & R_N^{(2,2)} \\ & & & & G_N^{(1,2)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_1(\beta) \\ D_1(\beta) \\ \vdots \\ B_N(\beta) \\ D_N(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(\beta) \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.16}$$

Матрицы  $N_i$ ,  $M_i$ ,  $R_i$ ,  $G_N$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
N_1^{(1,2)} &= \left[ -2\beta\lambda(1-\gamma_1) + \varphi_1(\beta)\varphi_1(\beta)e^{-\beta\lambda(1-\lambda_1)} \right] \\
M_i^{(2,2)} &= \left[ \begin{array}{c} \varphi_i(\beta)e^{-\beta\lambda(\gamma_{i-1}-\lambda_i)} - 2\beta\lambda(\gamma_{i-1}-\gamma_i) + \varphi_i(\beta) \\ (1-\mu_i)e^{-\beta\lambda(\gamma_{i-1}-\gamma_i)} - (1-\mu_i) \end{array} \right] \\
R_i^{(2,2)} &= \left[ \begin{array}{cc} 2\beta\lambda(\gamma_{i-1}-\gamma_i) - \varphi_i(\beta) - \varphi_i(\beta)e^{-\beta\lambda(\gamma_{i-1}-\gamma_i)} & \\ -\chi_{i-1}(1-\mu_i) & \chi_{i-1}(1-\mu_i)e^{-\beta\lambda(\gamma_{i-1}-\gamma_i)} \end{array} \right] \\
P_{N+1}^{(2,1)} &= \left[ -\chi_N^{-1}(1-\mu_{N+1}) \right] \\
G_N^{(1,2)} &= \left[ (\beta\varphi_N - q(1-\mu_N))^{-\beta\lambda\gamma_{N-1}} \beta(-2\beta\lambda\gamma_{N-1} + \varphi_N) + q(1-\mu_N) \right]
\end{aligned}$$

где:

$$\left. \begin{aligned}
\varphi_i &= 1 + 2\varphi_i(\beta); \\
q &= 2 \frac{1 + \mu_N}{E_N} cR; \\
\chi_i &= \frac{(1 + \mu_{i+1})E_i}{(1 + \mu_i)E_{i+1}}.
\end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

В случае равномерно распределённой нагрузки интенсивностью  $q = const$  по кругу радиусом  $R$  трансформант Хенкеля имеет вид:

$$\bar{p}(\beta) = -q \frac{I(\beta)}{\beta} \quad (7.18)$$

Напряжения в многослойных плитах при несимметричном расположении нагрузки и влияние различных способов соединения плит между собой учитываются путём умножения напряжения или моментов при центральном загрузении плиты на переходной коэффициент  $k'$ :

$$\sigma_{ki} = k' \sigma_{ki}^H \quad (7.19)$$

где  $\sigma_{ki}$  - напряжения в плите при несимметричном расположения нагрузки;

$k'$ - переходной коэффициент, определяемый по рис 7.2 в зависимости от наличия и вида стыковых соединений; при устройстве в плитах со сквозными швами краевого армирования коэффициент  $k'$  принимают как для варианта со стыковыми соединениями;

$\sigma_{ki}^H$  - напряжения в плите при симметричном (центральном) приложении нагрузки.

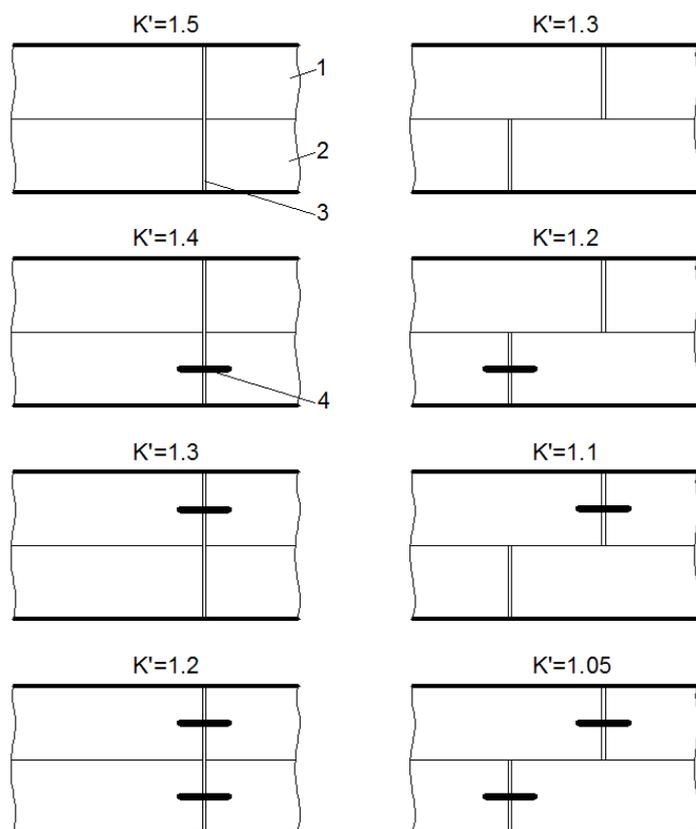
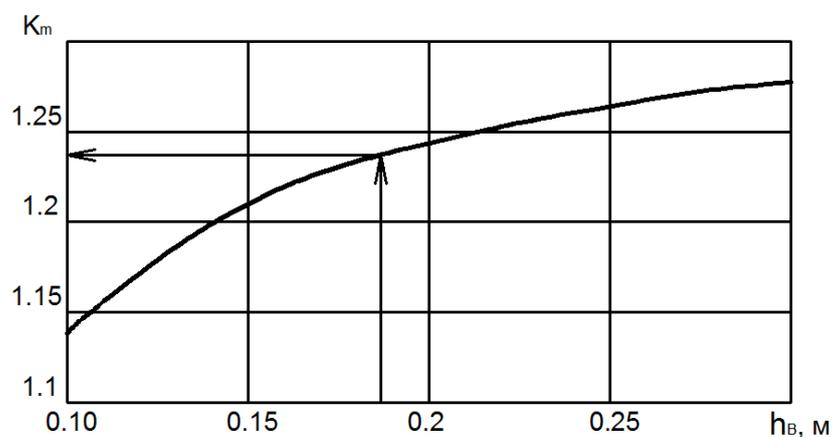


Рис. 7.2 Варианты двухслойных конструкций плит.

При расчете двухслойных плит должно удовлетворяться условие (1.1) для плит верхнего и нижнего слоев.

Предельный изгибающий момент  $m_u$  определяют по формуле (3.19), (4.7), (5.13), при этом предельный изгибающий момент в плитах нижнего слоя, вычисленный по этой формуле, следует умножать на поправочный коэффициент  $k_m$ , определяемый по графику (рис. 7.2) в зависимости от толщины верхнего слоя.

Рис. 7.2. График для определения поправочного коэффициента  $k_m$ .

Расчетные изгибающие моменты в плитах верхнего и нижнего слоев двухслойного покрытия  $m_{d,sup(inf)}$ , на единицу ширины сечения плиты определяются по формулам:

- в плитах верхнего слоя с совмещенными швами:

$$m_{d,sup} = \frac{k' m_{c,max}}{1 + \frac{B_{inf}}{B_{sup}}} \quad (7.20)$$

- в плитах нижнего слоя с совмещенными швами:

$$m_{d,inf} = k' m_{c,max} - m_{d,sup}; \quad (7.21)$$

- в плитах верхнего слоя с несовмещенными швами:

$$m_{d,sup} = \frac{k_1 m_{c,max}}{1 + \frac{B_{inf}}{B_{sup}}} \quad (7.22)$$

- в плитах нижнего слоя с несовмещенными швами:

$$m_{d,inf} = \frac{m_{c,max}}{1 + \frac{B_{sup}}{B_{inf}}} \quad (7.23)$$

где:

$m_{c,max}$  - максимальный изгибающий момент, при центральном нагружении однослойной плиты жесткостью  $B_{inf} + B_{sup}$ ;

$B_{sup}, B_{inf}$  - жесткость плит соответственно верхнего и нижнего слоев, отнесенная к единицам ширины их сечений;

$k'$  - поправочный коэффициент, принимаемый равным:

1,5 - при отсутствии стыковых соединений в верхнем и нижнем слоях;

1,4 - при устройстве стыковых соединений только в нижнем слое;

1,3 - при устройстве стыковых соединений только в верхнем слое;

1,2 - при устройстве стыковых соединений в верхнем и нижнем слоях;

$k_1$  - поправочный коэффициент, учитывающий концентрацию изгибающих моментов в верхнем слое двухслойного покрытия с несовмещенными швами над краями и углами плит нижнего слоя, принимаемый равным:

1,3 - при отсутствии стыковых соединений в верхнем и нижнем слоях;

- 1,2 - при устройстве стыковых соединений только в нижнем слое;
- 1,1 - при устройстве стыковых соединений только в верхнем слое;
- 1,05 - при устройстве стыковых соединений в верхнем и нижнем слоях или только в верхнем слое;

При усилении существующих плит полов необходимо руководствоваться положениями по расчёту двухслойных плит с несовмещёнными швами.

## 11. РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ БЕТОННЫХ ПОЛОВ С УЧЕТОМ ДИНАМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НАГРУЗОК ОТ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ГРУЗОПОДЪЁМНОГО ТРАНСПОРТА.

### 11.1. Динамическое воздействие подвижной нагрузки.

Особенность динамической задачи - необходимость учета сил инерции, являющихся функциями массы многослойных плит и их ускорений. Расчету плит, лежащих на грунтовом основании, на воздействие динамических нагрузок посвящены работы В.Ф. Бабкова, А.П. Синицина, В.А. Киселева, Б.Г. Коренева, Г.И. Глушкова, И.А. Медникова. При динамическом расчете расчетную модель назначают с учетом необходимой точности решения, которая соответствует системе с бесконечным числом степеней свободы. Она приводит к необходимости интегрирования неоднородного дифференциального уравнения в частных производных, так как перемещения точек плиты являются функциями координат и времени:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p(x, y) = g(x, y, t) \quad (8.1)$$

где:

$D$  - цилиндрическая жесткость плиты;

$w$  - прогиб плиты;

$x, y$  - координаты срединной плоскости плиты;

$m$  - масса плиты;

$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  - силы инерции плиты;

$p(x, y)$  - реактивный отпор основания;

$g(x, y, t)$  - нагрузка.

Рассмотрим решение уравнения (8.1) для случая движения нагрузки, распределенной по площади одного прямоугольника, по плите неограниченных размеров при винклеровской модели основания.

Определение усилий в плите при действии нескольких нагрузок может быть произведено с помощью принципа суперпозиции нагрузок. Введем вместо неподвижных координат  $x$  и  $y$  подвижные  $\zeta$  и  $\eta$ , движущиеся вместе с нагрузкой с

постоянной скоростью  $v$  (рис. 8.1). Тогда получим:

$$\xi = x - v_x t; \quad \eta = y - v_y t \quad (8.2)$$

где:  $v_x, v_y$  - проекции скорости на оси координат  $x$  и  $y$ ;  $t$  - время.

Произведя замену  $x$  и  $y$  в уравнении (8.1) на  $\xi$  и  $\eta$ , получим:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} \right) + m \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} v_x^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} v_x v_y + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} v_y^2 + cw \right) = p(\xi; \eta) \quad (8.3)$$

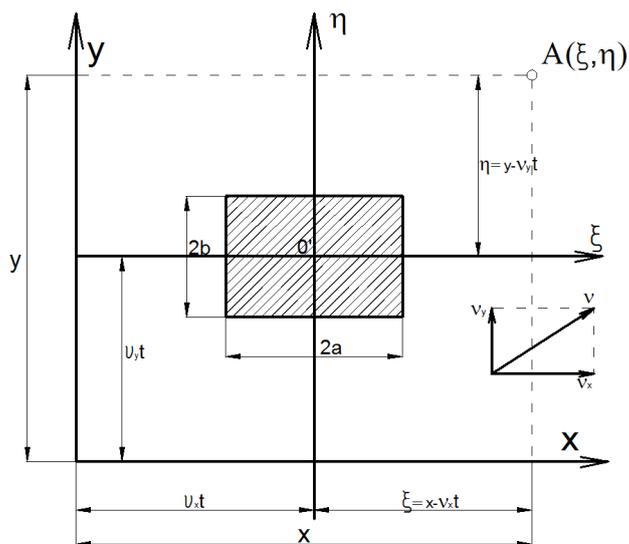


Рис. 8.1. Расчётная схема для определения динамического воздействия подвижной нагрузки.

Согласно этому методу известно, что если  $\varphi(x, y)$  и ее частные производные есть непрерывные функции, равные нулю в бесконечности, то для трансформанта Фурье

$$E_{\varphi(\alpha, \beta)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) e^{i(\alpha x + \beta y)} dx dy \quad (8.4)$$

существует обратное преобразование:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\varphi(\alpha, \beta)} e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \quad (8.5)$$

Уравнение (8.3) умножаем на  $\frac{1}{2\pi} e^{i(\alpha x + \beta y)}$  и, интегрируя по всей плоскости,

получаем:

$$D(\alpha^2 + \beta^2) E_{(\alpha, \beta)} - m(v_x \alpha + v_y \beta)^2 E_{(\alpha, \beta)} + c E_{(\alpha, \beta)} = E_{p(\alpha, \beta)} \quad (8.6)$$

Откуда:

$$E_{(\alpha,\beta)} = \frac{E_p(\alpha, \beta)}{c - m(v_x \alpha + v_y \beta)^2 + D(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha d\beta \quad (8.7)$$

Используя выражение (8.5) получаем:

$$w_{\xi,\eta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_{p(\alpha,\beta)} e^{-i(\alpha\xi + \beta\eta)}}{c - m(v_x \alpha + v_y \beta)^2 + D(\alpha^2 + \beta^2)^2} d\alpha d\beta \quad (8.8)$$

Если принять, что  $v_y = 0$  - нормальный режим движения транспортного средства ( $v_x = v$ ), а  $p(\xi; \eta)$  соответствует нагрузке, равномерно распределенной по прямоугольнику со сторонами  $2a$  и  $2b$  с интенсивностью  $q$ , то после ряда преобразований получим выражения для прогибов плиты и изгибающих моментов:

$$\begin{aligned} w_{(\xi,\eta)} &= \frac{4q}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha \xi \cos \beta \eta \sin \alpha a \sin \beta b d\alpha d\beta}{\alpha \beta [c - mv^2 \alpha^2 + D(\alpha^2 + \beta^2)^2]} \\ M_{\xi} &= \frac{4qD}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha^2 + \beta^2 \mu) \sin \alpha a \sin \beta b \cos \alpha \xi \cos \beta \eta d\alpha d\beta}{\alpha \beta [c - mv^2 \alpha^2 + D(\alpha^2 + \beta^2)^2]} \\ M_{\eta} &= \frac{4qD}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(\mu \alpha^2 + \beta^2) \sin \alpha a \sin \beta b \cos \alpha \xi \cos \beta \eta d\alpha d\beta}{\alpha \beta [c - mv^2 \alpha^2 + D(\alpha^2 + \beta^2)^2]} \end{aligned} \quad (8.9)$$

С целью получения решения для движущейся сосредоточенной силы  $P$  необходимо принять условия  $a \rightarrow 0$ ,  $b \rightarrow 0$ ,  $4abq = P$ . После ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned} w_{(\xi,\eta)} &= \frac{P}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha \xi \cos \beta \eta d\alpha d\beta}{c - mv^2 \alpha^2 + D(\alpha^2 + \beta^2)^2} \\ M_{\xi} &= \frac{PD}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha^2 + \mu \beta^2) \cos \alpha \xi \cos \beta \eta d\alpha d\beta}{c - mv^2 \alpha^2 + D(\alpha^2 + \beta^2)^2} \\ M_{\eta} &= \frac{PD}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(\mu \alpha^2 + \beta^2) \cos \alpha \xi \cos \beta \eta d\alpha d\beta}{c - mv^2 \alpha^2 + D(\alpha^2 + \beta^2)^2} \end{aligned} \quad (8.10)$$

На основании полученных выражений можно вычислить динамические коэффициенты как отношение моментов или прогибов плиты пола при динамической и статической нагрузках (статические моменты и прогибы вычисляются по формулам (8.9), (8.10), при условии, что  $v = 0$ ).

Для многих практических задач можно удовлетвориться приближенным решением, рассматривая плиту как систему с несколькими степенями свободы.

Наиболее простой моделью для приближенного решения динамической задачи будет система с одной степенью свободы, которая дает приемлемую точность.

Дифференциальное уравнение движения для системы с одной степенью свободы имеет вид:

$$M_{II} \frac{d^2 w}{dt^2} + k\Phi \frac{dw}{dt} + kw = P(t) \quad (8.11)$$

где:

$M_{II}$  - приведенная масса плиты;

$w$  - прогиб плиты;

$k$  - коэффициент жесткости плиты;

$\Phi$  - модуль затухания;

$P(t)$  - подвижная нагрузка.

Приведенную массу плиты с присоединенной массой грунта определим из условия, что кинетическая энергия системы, состоящей из плиты с присоединенной массой основания, равняется кинетической энергии сосредоточенной массы, расположенной в заданной точке. Примем условие, что при колебаниях, сохраняется одна и та же форма упругой поверхности плиты. Уравнение поверхности выразим так:

$$w_{(x,y)} = w_{\max} \varphi_{(x,y)} \sin p(t - \alpha) \quad (8.12)$$

где:

$w_{(x,y)}$  - прогиб в произвольной точке с координатами  $x$  и  $y$ ;

$w_{\max}$  - максимальный прогиб;  $\alpha$  - угол, определяемый начальными условиями.

Условие равенства кинетической энергии плиты с присоединенной массой основания кинетической энергии сосредоточенной массы запишем следующим образом:

$$U_{II} + U_{осн} = U_{пр} \quad (8.13)$$

где:

$U_{II}$  - кинетическая энергия плиты с распределенной массой;

$U_{осн}$  - кинетическая энергия присоединенного грунтового основания;

$U_{пр}$  - кинетическая энергия приведенной сосредоточенной массы.

Выражения для определения  $U_{II}$ ,  $U_{осн}$ ,  $U_{пр}$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
 U_{пл} &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^l \lambda_n h (w')^2 dx dy \\
 U_{осн} &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^l \int_0^l \lambda_r h \left( w' \frac{z}{h_0} \right)^2 dx dy dz \\
 U_{np} &= \frac{1}{2} M_n (w')^2
 \end{aligned} \tag{8.14}$$

где:

$l$  - длина плиты (для бесконечных плит - диаметр чаши прогиба при деформации плиты);

$\lambda_n$  - масса плиты, отнесенная к единице объема;

$\lambda_r$  - масса единицы объема грунтового основания;

$h$  - толщина плиты;

$h_0$  - глубина деформируемого слоя;

$z$  - ордината точки, расположенной на произвольной глубине.

Подставляя выражение (8.14) в равенство (8.13), для упрощения заменяя прямоугольные координаты полярными и производя необходимые преобразования, получаем:

$$M_n = 4\lambda_n h \int_0^{\pi/2} \int_0^R [2f_0(\xi)]^2 r dr d\varphi + \frac{4\lambda_0}{h_0^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^R \int_0^{h_0} [2f_0(\xi)]^2 z^2 dz dr d\varphi \tag{8.15}$$

Обозначив  $R = 3,8$ ,  $l = \sqrt[4]{\frac{D}{c}}$  и через  $f_0(\xi)$  - функцию Бесселя, окончательно получим:

$$M_n = 3,76l^2 \left( \lambda_n h + \frac{1}{3} \lambda_0 h_0 \right) \tag{8.16}$$

Коэффициент жесткости плиты  $k$  выражает усилие, необходимое для создания единичного перемещения. Он может быть выражен величиной, обратной прогибу плиты:

$$k = 2,4 \sqrt{c E_0 h^3} \tag{8.17}$$

где:  $c$  - коэффициент постели грунта;  $E_0$  - модуль упругости бетона;  $h$  - толщина плиты.

Модуль затухания  $\Phi$  характеризует влияние неупругих сопротивлений грунта и определяется опытным путем (значение  $\Phi$  меняется от 0,003 до 0,010 в зависимости

от вида грунтов). Чтобы определить нагрузку  $P(t)$  переменную во времени, воспользуемся методом приведенных сил. Для этого быстро перемещающуюся по плите нагрузку заменим одной неподвижной силой в центре приведения, но меняющей свое значение во времени. Закон изменения приведенной силы во времени определим из условия, что статическое перемещение центра приведения в любое мгновение от любой силы при её фактическом для данного мгновения положении на плите равняется перемещению такого же центра от приведенной силы с соответственно подобранным значением. Принимая значение прогиба центра плиты при любом расположении нагрузки в виде одной полуволны - синусоиды, получим:

$$P(t) = P \sin mt \quad (8.18)$$

$$m = \pi v / l$$

где  $m$  - частота вынужденных колебаний плиты заданной жёсткости;

$v$  - скорость движения нагрузки;

$l$  - то же, что и в формуле (8.14).

При расчетах конструкций плит учитывают максимальные значения прогибов и усилий, то есть начало колебательного процесса, а не конец. Поэтому при выполнении практических расчетов влияние неупругих сопротивлений грунта можно не учитывать. С учетом такого допущения интеграл дифференциального уравнения (8.11) может быть определен следующими формулами:

при  $mt_1 < \pi$  (нагрузка движется по плите):

$$w = w_{cm}^{\max} \frac{P}{p^2 - m^2} (p \sin mt - m \sin pt) \quad (8.19)$$

при  $mt_1 > \pi$  (нагрузка сошла с плиты):

$$w = w_{cm}^{\max} \frac{P}{p^2 - m^2} \{ [p \sin mt - m \sin pt] + [p \sin m(t - t_1) - m \sin p(t - t_1)] \} \quad (8.20)$$

где:

$p = \sqrt{\frac{k}{M_{II}}}$  - частота собственных колебаний плиты;

$w_{cm}^{\max} = \frac{P}{p^2 M_{II}}$  - прогиб плиты при статической нагрузке  $P$ .

По формулам (8.19) и (8.20) можно определить коэффициент динамичности как отношение прогибов покрытий при динамической и статической нагрузках.

Формулы для коэффициентов динамичности в зависимости от  $\beta = p/m$ , т. е. от соотношения частот собственных  $p$  и вынужденных  $m$  колебаний, а также характера колебаний плиты будут следующие:

свободные колебания  $\beta < 1$ :

$$k_d = \frac{2\beta}{1-\beta^2} \cos \frac{\beta\pi}{2}$$

вынужденные колебания  $\beta = 1$ :

$$k_d = \pi/2 \tag{8.21}$$

вынужденные колебания  $\beta = 1 \div 3$ :

$$k_d = \frac{\beta}{\beta-1} \sin \frac{2\pi}{\beta+1}$$

вынужденные колебания  $\beta > 3$ :

$$k_d = \frac{\beta}{\beta-1}$$

Для практических расчетов с достаточной точностью можно применять решения для системы и с одной степенью свободы. Суммарное воздействие подвижной нагрузки будет определяться коэффициентом динамичности.

## 11.2. Назначение расчётных коэффициентов динамичности.

Определение расчетных значений динамических нагрузок при определении изгибающих моментов производится по следующей формуле:

$$P_{дин} = P_{ст} k_D \quad (8.22)$$

где:

$P_{дин}$  - динамическая нагрузка на покрытие при движении транспортного средства;

$P_{ст}$  - статическая нагрузка от транспортного средства;

$k_D$  - расчётный коэффициент динамичности.

Для получения прогибов и изгибающих моментов по формулам (8.9) и (8.10) при движении подвижных нагрузок рассматриваются колебания плиты под воздействием динамической нагрузки, определенной по формуле (8.22).

Опытные данные показывают, что при кратковременном воздействии нагрузки значения коэффициента постели (модули упругости) грунта возрастают. Учет замедленно развивающихся вязких деформаций грунтового основания имеет большое значение при расчете плит. Благодаря упруго-вязким свойствам грунтовых оснований деформации плит развиваются замедленно, поэтому при движении подъёмно-транспортного оборудования по ровным поверхностям динамический коэффициент близок к единице. При движении по неровной поверхности динамические коэффициенты возрастают и достигают наибольшего значения при движении со скоростью 30-50 км/ч.

Исследования показали, что при современных технологиях строительства полов их ровность является хорошей. Установлено, что в этом случае, отношение динамических нагрузок к статическим изменяется от 1,2 до 1,6.

При движении нагрузки по ровной поверхности расчетные значения коэффициентов динамичности зависят, в том числе, от материала обода колёс транспортных средств:

$k_D = 1,2$  - для пневматических шин;

$k_D = 1,4$  - для стандартных литых резиновых колёс и колёс с обрешиненным ободом;

$k_D = 1,6$  - для полиуретановых колёс.

Автомобильное движение по полам промышленных помещений включает в себя, в основном, перемещение погрузчиков и грузовых автомобилей различной грузоподъемностью. Груз и основной вес транспортных средств сосредоточен на колесах нагруженной оси. Параметры транспортных средств, влияющие на выбор толщин при проектировании плит полов на грунтовом основании следующие:

- максимальная осевая нагрузка;
- расстояние между нагруженными осями и колесами;
- площадь контакта колёс и плиты;
- повторяемость нагрузки в течение срока эксплуатации.

Осевая нагрузка, расстояния между осями и колёсами, а также площадь контакта являются основными расчётными параметрами погрузчика или автотранспортного средства.

Количество циклов (повторяемость) нагружения может применяться для определения запаса прочности по материалу. Зная повторяемость нагрузки, можно количественно измерить усталость (бетона). Часто плита пола проектируется на неограниченное количество циклов нагружения.

Площадь контакта колеса и плиты используется для расчёта плиты при движении погрузчика с одинарными или составными колёсами. Площадь контакта одинарного колеса можно примерно определить, разделив нагрузку на давление в шинах. Принятое давление является неодинаковым для различных типов колёс; давление в пневматических шинах с неметаллическим кордом лежит в пределах 0,6-0,7МПа, а при наличии металлического корда - 0,6-0,8МПа. Площадь контакта стандартных литых резиновых колёс и колёс с обрешеченным ободом с поверхностью перекрытия определяется внутренним давлением от 1,2 до 1,7 МПа. В полиуретановых колёсах давления, превышают 6,9 МПа.

Сдвоенные колёса имеют большую площадь контакта, чем два отдельных колеса. Для определения данной полезной площади существуют специальные таблицы. Предварительную оценку данной площади контакта можно дать на основании анализа площади контакта двух шин и площади между зоной этого контакта. Если точно неизвестно, будут ли применяться транспортные средства со

сдвоенными колесами и расстояния между колёсами, необходимо руководствоваться нагрузкой на соответствующее количество одинарных колес.

Движущееся транспортное средство приводит к появлению эффекта усталости материала плиты. Усталостная прочность выражается в процентах от статической прочности на растяжение материала плиты для заданного количества циклов нагрузок. Стержневая и фибровая арматура значительно снижают усталостные напряжения. Особенно эффективным, при этом, является фибровое армирование с сочетанием низко- и высокомодульных волокон. По мере снижения отношения фактического напряжения при изгибе к его расчётному сопротивлению, увеличивается количество циклов нагрузки, которое может выдержать плита. При коэффициенте напряжения менее 0,45, бетон плиты может подвергаться неограниченному циклу нагружений. В таблице 8.1 показано количество циклов нагрузки при различных коэффициентах напряжения для неармированного бетона. Коэффициент прочности обратно пропорционален коэффициенту напряжения.

Таблица 8.1. Коэффициент напряжения и допустимое количество циклов нагрузки (кривая усталости PCA)  
(по данным EB109.01P, Ассоциация портландцемента,  
Скоки, штат Иллинойс (1984).

Коэффициент напряжения	Допустимое количество циклов нагрузки	Коэффициент напряжения	Допустимое количество циклов нагрузки
<0.45	неограниченно	0.73	832
0.45	62.790.761	0.74	630
0.46	14.335.236	0.75	477
0.47	5.202.474	0.76	361
0.48	2.402.754	0.77	274
0.49	1.286.914	0.78	207
0.50	762.043	0.79	157
0.51	485.184	0.80	119
0.52	326.334	0.81	90
0.53	229.127	0.82	68
0.54	166.533	0.83	52
0.55	124.523	0.84	39
0.56	94.065	0.85	30
0.57	71.229	0.86	22
0.58	53.937	0.87	17
0.59	40.842	0.88	13
0.50	30.927	0.89	10
0.61	23.419	0.90	7
0.62	17.733	0.91	6
0.63	13.428	0.92	4
0.64	10.168	0.93	3
0.65	7700	0.94	2
0.66	5830	0.95	2

0.67	4415	0.96	1
0.68	3343	0.97	1
0.69	2532	0.98	1
0.70	1917	0.99	1
0.71	1452	1.00	0
0.72	1099	>1.00	0

## **12. НАЗНАЧЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ЖЁСТКОСТИ УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ В СЛУЧАЕ ПРИМЕНЕНИЯ МОДЕЛИ МЕСТНЫХ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ.**

Эксплуатационная надёжность конструкций промышленных полов во многом определяется правильностью назначения характеристик деформируемости подстилающего грунтового основания.

С точки зрения строительной механики, конструкции полов, в общем случае, являются многослойными системами, рассматриваемыми в виде бесконечной гибкой многослойной плиты опирающейся на многослойное упругое полупространство. Передача давления, осадка и сжатие отдельных слоев многослойных систем в основном зависят от толщин отдельных слоев, их модулей упругости и коэффициентов объёмного расширения.

При анализе вариантов конструкций полов обоснованным является оценка напряжённо-деформируемого состояния (НДС) конструкции в соответствии с решениями теории упругости. Однако, чтобы подчеркнуть, что теория упругости применяется с оговорками, принято говорить о работе грунта не как об упругой среде, а как о линейно – деформируемой среде; по той же причине термин «модуль упругости», в этом случае, заменяется термином «модуль деформации». НДС в данных конструкциях формируется в результате воздействия эксплуатационных нагрузок, напряжений и деформаций рассматриваемой плиты совместно с подстилающим её упругим (упруго-пластичным) грунтовым основанием. Величина возникающих напряжений и деформаций зависит от степени сжимаемости и однородности слоёв грунтового основания, жёсткости конструкции несущей плиты, качества строительных работ и исследования грунтов, а также от величин интенсивности и месторасположения нагрузок.

Общепризнанна сложность определения НДС данной многослойной системы.

Плиты полов, являющиеся, с точки зрения строительной механики, конструкциями, лежащими на упругом основании, относятся к классу трудно формализуемых задач, и одной из причин этого является то, что грунт представляет

собой разнородную и слабоизученную, с точки зрения геомеханики, среду. Физически, грунтам основания присущи свойства «очень вязкой жидкости», описываемые уравнениями математической физики. Кроме этого, в отличие от жёстких (с точки зрения теории упругости) плитных фундаментов, плита пола, является гибкой конструкцией, в результате взаимодействия которой со сжимаемым основанием возникают прогибы от действия произвольно расположенных сосредоточенных сил, соизмеримые с прогибами контактирующей поверхности грунта. При этом, возникает необходимость определения этих прогибов, сравнения их с допустимыми величинами, расчёта значений действующих изгибающих моментов, для определения толщины и армирования плиты, а также оценки возможного трещинообразования.

Уравнение прогибов плиты описывается известным бигармоническим дифференциальным уравнением с частными производными для изгиба средней плоскости плиты жёсткостью  $D$  под нормальной к её поверхности внешней нагрузкой  $q(x,y)$ :

$$D \left( \frac{d^4 \omega}{dx^4} + 2 \cdot \frac{d^4 \omega}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 \omega}{dy^4} \right) = q(x, y) - p(x, y) \quad (9.1)$$

где:  $p(x, y)$  - нормальная реакция основания.

Для случая симметричного нагружения плиты относительно расчётного центра, к которым относятся нагрузки от оборудования на полы, необходимо рассматривать вместо решения уравнения (9.1) в частных производных для прямоугольных плит решения для круглой бесконечной плиты с осевой симметрией. В этом случае прогибы плиты зависят только от одного переменного – расстояния от центра симметрии (как правило расчётного центра нагрузок) до рассматриваемого сечения, то есть, появляется возможность решения данного уравнения более простым способом (в полярных координатах). Решение этого уравнения в данном случае упрощается: вместо достаточно сложного для практического решения задач уравнения (9.1) с частными производными решается обыкновенное дифференциальное уравнение с двумя неизвестными функциями:

$$D\left(\frac{d^4Y}{dr^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d^3Y}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2Y}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{dY}{dr}\right) = q(r) - KY \quad (9.2)$$

Задача всякой модели основания состоит в том, чтобы отыскать второе уравнение, связывающее эти функции. Наиболее простым решением явилось предположение, по аналогии с законом Гука, о прямой пропорциональности между этими величинами, получившей название **гипотезы Фусса-Винклера**:

$$p = k \cdot w \quad (9.3)$$

где,  $k$  – коэффициент пропорциональности (т.н. «коэффициент постели»).

Развитие этой гипотезы получило широкое распространение в инженерной практике, и уточняющие её положения активно развивались до начала 30-х годов прошлого века. За это время выявились слабые стороны этой гипотезы, а именно предположение о наличии осадок грунта за пределами загруженной площади. Поэтому, именно в 30-е годы началась разработка новой модели, представлявшей основание в виде упругого полупространства. Эта модель была предложена независимо К. Викхардом и Г.Э. Проктором. Бигармоническое уравнение изгиба плиты заменялось при этом более сложной интегральной зависимостью, вытекавшей из формулы Буссинеска:

$$\omega(x, y) = \frac{2 \cdot (1 - \nu_0^2)}{E_0} \iint_F \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \quad (9.4)$$

Новая теория устранила недостатки, присущие теории Винклера, в расчётные формулы стали входить более понятные величины модуля деформации  $E_0$  и коэффициента Пуассона  $\nu_0$ , но решение конкретных задач по новой теории стало более сложным, т.к. дифференциальное уравнение для прогибов, получаемое из соотношений (9.1 - 9.3) превратилось уже в достаточно более сложное интегродифференциальное. В самом деле, из формулы (9.1), следует, что:

$$p(x, y) = p_1(x, y) + p_2(x, y) \quad (9.5)$$

Подставляя это выражение в (9.4) получаем:

$$\omega(x, y) + \frac{2D(1 - \nu_0^2)}{E_0} \cdot \iint \frac{\Delta\Delta\omega(x', y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} dx' dy' = \frac{2 \cdot (1 - \nu_0^2)}{E_0} \iint_F \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \quad (9.6)$$

Недостатки данной модели основания не исчерпывались только математическими трудностями. Предположение о деформируемости основания на бесконечную глубину привело к завышенным значениям осадок при расчёте сооружений, что приводило к перерасходу строительных материалов. В тех случаях, когда по технологическим требованиям необходимо было обеспечить весьма малую разность осадок соседних областей плиты, например при расчёте полов и фундаментов для объектов точного машиностроения, расчёт давал явно нереальную толщину фундаментов и полов здания.

Обойти эту трудность позволила модель основания в виде упругого слоя подстилаемого несжимаемой толщей. Для этой модели зависимость между напряжениями и деформациями имеет более общий вид:

$$\omega(x, y) = \iint_F K(x - x', y - y', h) p(x', y') dx' dy' \quad (9.7)$$

Решение задачи об осадке поверхности упругого слоя толщиной  $h$  для точки с координатами  $(x, y)$ , нагруженной сосредоточенной силой  $(x', y')$  было получено Маргерром в 1933 г.

Модель упругого слоя в математическом отношении является более общей, чем модель упругого полупространства. Поэтому, положительные стороны модели упругого полупространства, целиком присущи и модели упругого слоя. Использование модели упругого слоя позволило «снизить» расчётные значения усилий и особенно деформаций в конструкциях на упругом основании.

Однако, введение упругого слоя ещё более усугубило математические трудности теории, т.к. ядро интегродифференциального уравнения стало ещё более сложным. Поэтому часть исследователей пошла по другому пути в создании модели основания – по пути совершенствования гипотезы Винклера. П.Л. Пастернак предложил учесть сопротивление поверхности основания сдвигу в поперечном направлении. М.И. Филоненко-Бородич предложил так называемую «мембранную» и «ламинарную» модели, где «винклеровские» независимые пружины дополняются нерастяжимой нитью постоянной горизонтальной проекцией натяжения  $T$ , помещаемой поверх пружин (в пространственном случае нить заменяется мембраной). Необходимо отметить, что дифференциальное

уравнение поверхности мембраны, подкреплённой пружинами, было приведено ранее Т. Карманом:

$$Kw - T\nabla^2 w = -q(x, y) \quad (9.8)$$

Наконец В.З. Власов рассмотрел в качестве основания упругий слой весьма малой толщины, сделав при этом ряд упрощающих предположений, приняв, в частности, что горизонтальные перемещения внутри слоя равны нулю, а вертикальные – линейно убывают с глубиной, обращаясь в ноль на нижней границе упругого слоя.

Несмотря на внешние различия подходов все три исследователя пришли к взамен выражения (8.1) к выражению:

$$p = k_1 w - k_2 \Delta w \quad (9.9)$$

Последнее слагаемое в правой части этого равенства выражает сопротивление основания сдвигу в вертикальном направлении, моделируемое каждым из авторов по-своему. Коэффициент  $k_2$  в литературе часто называют *вторым коэффициентом постели*, а соотношение (9.9) – гипотезой двух коэффициентов постели или моделью Пастернака. Ясно, что, положив  $k_2 = 0$ , т.е. пренебрегая работой основания на сдвиг (для случая несвязанных и малосвязанных переувлажнённых грунтов), мы снова возвращаемся к гипотезе Винклера.

Однако, модель с двумя коэффициентами постели в отличие от Винклеровской даёт возможность предсказать прогибы плиты ограниченной жёсткости при равномерном нагружении, а также осадки поверхности основания за пределами площади опирания плиты. По мере удаления от края плиты, осадки, вычисленные по Пастернаковской модели, затухают гораздо быстрее, чем в соответствии с моделью упругого полупространства. То, что в действительности размер «осадочной воронки» («чаши прогиба») гораздо меньше, чем следует из модели упругого полупространства, подтверждается опытными данными и часто является главным аргументом в пользу замены этой модели моделью с двумя коэффициентами постели (9.9). Однако, как показал К.Е. Егоров, уменьшение расчётного размера осадочной воронки можно получить и при помощи модели упругого слоя, причём, чем меньше толщина слоя, тем меньше и этот размер.

Недостатком Пастернаковской модели является то, что расчёт по ней даёт кроме распределённой по всей площади плиты реакции грунтового основания дополнительную сосредоточенную погонную реакцию по внешнему контуру плиты. С принципиальной точки зрения решения задачи о такой плите становится некорректным. Правда В.З. Власов в своей монографии показал, что вытекающая из такой некорректности задачи ошибка, в расчётных усилиях, практически невелика.

Экспериментальное определение обоих коэффициентов постели и использование найденных значений в расчёте прямоугольной плиты на упругом основании показали, что в тех реальных пределах, в которых меняется величина  $k_2$ , она практически не оказывает влияние на значения расчётных усилий в плите. Если учесть недостаточную надёжность методики определения второго коэффициента постели, то следует признать, что **вопрос об использовании в расчётах конструкций полов модели с двумя коэффициентами постели представляет интерес лишь с теоретической точки зрения.**

Несмотря на разнообразие применяемых в отечественной и мировой инженерной практике методов определения жёсткости основания общепризнанны две основные модели, которые, с некоторыми допущениями, возможно использовать для рассмотрения поведения грунтов под нагрузкой:

**Модель местных упругих деформаций** (модель Фусса-Винклера), согласно которой, конструкция (плита или балка) прогибается под действием вертикальной силы, прямо пропорционально этой силе без передачи сдвиговых усилий соседним участкам, находящимся вне нагруженных зон и реактивное напряжение в каждой точке поверхности контакта прямо пропорционально осадке поверхности основания в той же точке.

**Модель упругого полупространства**, эта модель, при которой считается, что при действии вертикальной нагрузки, поверхность грунта оседает как в пределах площади загрузки, так и за её пределами. Грунт основания рассматривается как линейно деформируемая среда, подчиняющаяся решениям механики сплошных сред. Модуль упругости заменяется понятием «модуль общей деформации», а нагрузка, действующая на поверхность полупространства, создает непрерывный и нечетко ограниченный прогиб. Для модели упругого полупространства создана методика расчёта лишь для жёстких и

полужёстких плит.

Концепция Винклеровской модели предполагает, что плита является уравновешенным однородным изотопным упругим телом, а также, что грунтовое основание имеет реакцию только в вертикальном направлении и пропорционально прогибам плиты. Считается, что грунт является упругой средой, где упругость определяется усилием, распространяемым по единице площади, создавая прогиб, равный единице, названным «коэффициентом постели», который равен величине нагрузки на единицу площади, вызывающей единичный прогиб, измеряемый в Н/мм<sup>3</sup>. Другими словами, грунтовое основание можно рассматривать как ряды близко расположенных, но независимых упругих пружин, имеющих определённую жесткость (упругость). Таким образом, коэффициент постели приравнивается к коэффициенту упругости пружин и является мерой жесткости грунта.

На практике, реакция реального грунтового основания, занимает промежуточное положение между этими двумя моделями, но Винклеровская модель считается более предпочтительной для расчёта неограниченных по ширине плит полов лежащих на **упруго - пластичном** грунтовом основании. Одним из важных отличий между этими моделями, применительно к конструкциям полов, является то, что, при действии нагрузок на край или угол нагруженной плиты, согласно Винклеровской модели, плита под нагрузкой прогибается без деформации смежной ненагруженной плиты, а, согласно упругой модели, две плиты прогибаются вместе.

Методик определения жесткостных характеристик многослойного основания для Винклеровской и Пастернаковской моделей очень много и их количество приближается к количеству исследователей.

В последнее десятилетие появились компьютерные программы, основанные на методах МКЭ, МКР, МГЭ, позволяющие численными методами достаточно точно моделировать напряжённо - деформированное состояние, в том числе, и гибких конструкций. Однако сложность для пользователей заключается в правильности задания нагрузок и назначении расчётной модели.

Пожалуй, наиболее продвинутой моделью в настоящее время является представление грунтового массива в виде конечно-элементной модели, учитывающей разнородность грунта (наличие грунтовых слоёв с различными

свойствами) и нелинейные зависимости между напряжениями и деформациями, основанными на той или иной теории прочности, например, теории Кулона:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \cdot 2 \leq \sin(\varphi) \times (\sigma_1 + \sigma_3) \cdot 2 + R_c \quad (9.10)$$

для плоского напряжённого состояния,

или:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \cdot 2 \leq \sin(\varphi) \times (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \cdot 3 + R_c \quad (9.11)$$

при  $R_s \times \operatorname{tg}(\varphi) < R_c$

для объёмного (3-х мерного) напряжённого состояния,

где:  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  - главные напряжения;

$R_s$  - предельное напряжение при растяжении;

$\varphi$  - угол внутреннего трения;

$R_c$  - напряжение сдвига.

Такая модель громоздка даже для современных программных комплексов, т.к. размеры грунтового массива должны приниматься достаточно большими с тем, чтобы характер граничных условий по области, учитывающий этот массив, не оказывал существенного влияния на НДС рассчитываемой конструкции (согласно принципу Сен-Венана). Поэтому часто используются одноконстантная модель Винклера (коэффициент постели  $C1$ ) или двухконстантная модель Пастернака (коэффициент постели  $C1$  и коэффициент сдвига  $C2$ ). Безусловно, такие модели являются очень упрощёнными, поэтому требуют введения ряда предпосылок. Этим объясняется наличие большого количества методик по определению  $C1$  и  $C2$ , авторы которых, ссылаются на натурные наблюдения, которые изначально не могут быть представительными из-за большой разнородности характеристик грунтов.

Можно выделить два основных подхода, лежащих в основе многочисленных методик по определению  $C1$  ( $C2$ , как правило, определяется как функция от  $C1$ ).

#### 1-й подход:

В основе лежит расчёт  $C1$  через усреднённый модуль деформации и коэффициент Пуассона слоёв грунта, входящих в сжимаемую толщу, т.е.:

$$E_0 = \frac{\sum_1^n H_i \cdot \sigma_{z,i}}{\sum_1^n \left( \frac{H_i \cdot \sigma_{z,i}}{E_i} \right)} \quad (9.12)$$

$$\nu_0 = \frac{\sum_1^n \nu_i \cdot h_i}{H_c} \quad (9.13)$$

где:  $\sigma_i$  - дополнительное вертикальное напряжение на глубине  $Z$  в  $i$ -том подслое;

$h_i, E_i$  – толщина и модуль деформации  $i$ -того слоя;

$n$  – количество слоёв грунта;

$H_c$  – глубина сжимаемой толщи;

$\mu_i$  – коэффициент Пуассона  $i$ -того слоя;

$\nu_0, E_0$  – осреднённые коэффициент Пуассона и модуль деформации грунта в пределах сжимаемой толщи.

Определение коэффициента постели ( $C1$ ) производится на основании задачи теории упругости для осадок слоя ограниченной толщины, лежащем на несжимаемом (скальном) основании. Решение задачи, полученное по теории упругости, в случае, если упругий слой конечной толщины может без трения перемещаться по горизонтальной плоскости поверхности скалы, приводит к формуле осадок (1):

$$S = \frac{1}{E_0} \cdot p \cdot (1 - 2\nu_0^2) \quad (9.14)$$

где:  $p$  – давление на грунт.

В случае отсутствия перемещения упругого слоя по поверхности скалы:

$$S = \frac{p \cdot (1 - \nu_0) \cdot (1 - 2 \cdot \nu_0) \cdot H_c}{(1 - \nu_0) \cdot E_0} \quad (9.15)$$

Указанные соотношения полностью совпадают с формулой Винклера, если заменить  $S$  (осадки) на  $y$  (пргибы) и считать, что:

$$C1 = \frac{P}{S} \quad (9.16)$$

Исходя из этого получаем (для трёхмерной задачи):

$$C1 = \frac{E_0}{(1 - 2 \cdot \nu_0^2) \cdot H} \quad (9.17)$$

и

$$C1 = \frac{(1 - \nu_0) \cdot E_0}{(1 + \nu_0) \cdot (1 - 2 \cdot \nu_0) \cdot H} \quad (9.18)$$

### **2-й подход:**

В основе данного подхода лежит выражение:

$$C1 = \frac{P}{S_{общ}} \quad (9.19)$$

где:  $P$  - давление поверхности грунта;

$S_{общ}$  - полная осадка сжимаемой толщи грунта.

Осадка, при этом, определяется по формуле:

$$S_{общ} = \beta \cdot \sum_{i=1}^n [(\sigma_{zp,i} \cdot h_i) / E_i] \quad (9.20)$$

где:  $S_{общ}$  - условно соответствует величине вертикальных деформаций  $\varepsilon_z$ , определяемых исходя из обобщённого закона Гука для заданного интервала напряжений:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_0} \cdot [\sigma_z - \nu_0 \cdot (\sigma_x + \sigma_y)] \quad (9.21)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_0} \cdot [\sigma_x - \nu_0 \cdot (\sigma_z + \sigma_y)] \quad (8.22)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_0} \cdot [\sigma_y - \nu_0 \cdot (\sigma_x + \sigma_z)] \quad (9.23)$$

Учитывая, что сосредоточенные нагрузки на полы приводятся к эквивалентным равномерно-распределённым и плита пола является сплошной, работая в условиях компрессионного сжатия ( $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ ), получаем:

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu_0}{1 - \nu_0} \cdot \sigma_z \quad (9.24)$$

Тогда из вышеуказанных формул следует, что осадка грунта при действии на поверхности напряжения  $\sigma_z$ , направленного по оси «Z» равна:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_1}{E} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot \nu_0^2}{1 - \nu_0}\right) = \frac{\sigma_1}{E} \cdot \beta \quad (9.25)$$

Для расчёта эквивалентного коэффициента постели многослойного основания приведём значения сосредоточенных нагрузок ( $P_i$ ), действующих на полы к эквивалентной равномерно распределённой нагрузке  $P_{\text{экв.}}$ , действующую с напряжением  $\sigma_{z,p}$  на поверхности грунта, и определим глубину сжимаемой толщи по критерию:

$$\sigma_{z,p} = 0,5 \cdot \sigma_{z,q} \quad (9.26)$$

где:

$\sigma_{z,p}$  – напряжение, действующее на поверхности полупространства;

$\sigma_{z,q}$  – вертикальное напряжение от собственного веса грунта.

Расчётное значение осадки многослойного основания определим по схеме линейно-деформируемого полупространства по формуле:

$$S = \sum m_{V,i} \cdot \sigma_{zp,i} \cdot H_i \quad (9.27)$$

где:

$m_{V,i}$  – коэффициент относительной сжимаемости слоя, определяемый из соотношения:

$$m_{V,i} = \frac{1}{E_i} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{2 \cdot \nu_{0,i}^2}{1 - \nu_{0,i}} \right) \right] \quad (9.28)$$

где:

$\sigma_{zp,i}$  – вертикальное напряжение, действующее в  $i$ -том слое грунта, определяемое по формуле:

$$\sigma_{zp,i} = \sigma_{p,0} \cdot \alpha \quad (9.29)$$

где:

$\alpha$  – коэффициент «затухания» напряжений, определяемой заменой криволинейной эпюры рассеивания напряжений, рассчитанной по формуле Буссинеска на треугольную, достаточно точную с точки зрения инженерной практики.

$$\alpha = \frac{z_{i,0(i+1)}}{H_c} \quad (9.30)$$

где:

$z_{i,0(i+1)}$  – расстояние от точки, соответствующей глубине сжимаемого слоя  $H_c$  до середины рассматриваемого слоя:

$$z_{i,0} = H_c - H_i \cdot 0,5 \quad (9.31)$$

Итого полную осадку слоя можно представить в виде соотношения:

$$S_{\text{общ}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{E} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{2 \cdot \nu_{0,i}^2}{1 - \nu_{0,i}} \right) \right] \cdot \sigma_{p,0} \cdot \left[ \frac{Z_i^* \cdot H_c - 0,5 \cdot H_i}{H_c} \right] \cdot H_i \quad (9.32)$$

Наиболее простой и достаточно обоснованной моделью, описывающей поведение грунтового основания под нагрузкой, является расчёт коэффициента постели на основании 2-го подхода. На основании выведенных формул и соотношений можно сделать вывод о том, что коэффициент постели многослойного основания зависит от деформативных свойств всех слоёв грунта, входящих в сжимаемую толщу, и «вклад» каждого слоя зависит от удалённости этого слоя от поверхности полупространства. Однако значение поверхностных слоёв грунта, залегающих непосредственно под плитой пола, не стоит преувеличивать. При действии длительных нагрузок в работу включаются все слои грунта в пределах сжимаемой толщи, в том числе имеющиеся жёсткие подстилающие слои, и влияние каждого из них необходимо рассматривать дифференцированно, в зависимости от модулей их деформации (упругости), глубины залегания и мощности.

Особым случаем могут служить кратковременные динамические воздействия, например, от перемещения грузоподъёмного транспорта. В этом случае целесообразно использовать динамические значения модулей деформаций (упругости) грунта и модели грунтов, более полно отражающих распределительные свойства массива грунта, например, модель упругого полупространства. В условиях загрузки плиты пола вблизи температурно-усадочных швов, учитывая возникающие явления коробления, следует рассматривать работу плиты как полубесконечную прямоугольную пластину, нагруженную сосредоточенной силой при неполном контакте с основанием.

### 13. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПОСТЕЛИ И МОДУЛЕМ УПРУГОСТИ ОСНОВАНИЯ.

Сравнительная простота расчета плит на упругом основании по гипотезе Винклера свидетельствует о целесообразности вывести формулу, связывающую коэффициент постели с компонентами расчета по теории упругости, в которой основание рассматривается как упругое полупространство.

Для установления расчетного коэффициента постели будем рассматривать бесконечную во всех направлениях плиту на упругом однородном полупространстве.

Рассмотрим загрузку сосредоточенной силой и поставим задачу найти коэффициент постели из условия равенства наиболее важного расчетного фактора - изгибающего момента под силой, определенного по двум методам: Винклеровскому и теории упругости. Так как момент под силой, сосредоточенной в точке плиты, обращается в бесконечность, то силу будем считать равномерно распределенной по площади круга малого радиуса.

Поскольку поставленная задача осесимметрична, воспользуемся решением О.Я. Шехтер, давшей расчет бесконечной плиты на упругом полупространстве при действии сосредоточенной силы, и решением Уэстергарда, давшего аналогичный расчет для случая винклеровского основания.

Обозначим:  $w$  - прогиб плиты;  $r, \theta$  - полярные координаты ее срединной поверхности;  $M_r, M_\theta$  - радиальный и тангенциальный моменты в сечении плиты.

Учитывая, что в центре плиты при  $r = 0$ :

$$M_r = M_\theta \quad (10.1)$$

получим из выражения для изгибающих моментов в плите

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \mu \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \\ M_\theta &= -D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} \mu + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \end{aligned} \quad (10.2)$$

следующие выражения:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \quad (10.3)$$

$$M_r = M_\theta = -D(1 + \mu) \frac{d^2 w}{dr^2} \quad (10.4)$$

в формуле (10.4):

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = -\frac{P}{2\pi DaR} \int_0^\infty \frac{t l_1(art)}{1+t^3} dt \quad (10.5)$$

где:

$P$  - действующая сила;

$R$  - радиус следа от нагрузки, принимаемого круглым;

$l_1$  - функция Бесселя 1-го порядка;

$D$  - цилиндрическая жесткость плиты:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (10.6)$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{E_0}{2D(1 - \mu_0^2)}} \quad (10.7)$$

где:

$h$  - толщина плиты;

$E_0, \mu_0$  - модуль упругости и коэффициент Пуассона для основания;

$E, \mu$  - те же величины, для материала плиты.

Обозначим:

$$\eta = \int_0^\infty \frac{t l_1(art)}{1+t^3} dt \quad (10.8)$$

Учитывая выражения (10.4), (10.5), (10.6), (10.7), получим из формулы (10.4):

$$M = \frac{P(1 + \mu)h}{2\pi R} \sqrt{\frac{E(1 - \mu_0^2)}{6E_0(1 - \mu^2)}} \eta \quad (10.9)$$

Для бесконечной плиты на Винклеровском основании, при тех же условиях загрузки, наибольшее напряжение:

$$\sigma_{\max} = 0,275(1 + \mu) \frac{P}{h^2} \log \frac{Eh^3}{cR^4} \quad (10.10)$$

где,  $c$  - коэффициент постели основания.

Следовательно, момент в центре плиты:

$$M = \frac{h^2}{6} \sigma_{\max} \quad (10.11)$$

или:

$$M = \frac{0,275(1 + \mu)}{6} P \log \frac{Eh^3}{cR^4} \quad (10.12)$$

Из сравнения формул (10.9) и (10.12) получим:

$$c = \frac{Eh^3}{R^4 10^{a_0}} \quad (10.13)$$

$$a_0 = 1,91\eta \frac{h}{R} \sqrt[3]{\frac{E(1 - \mu_0^2)}{E_0(1 - \mu^2)}} \quad (10.14)$$

Значения  $\eta$  в зависимости от величины  $aR$  приведены ниже:

$aR$ .....	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6
$\eta$ .....	0,091	0,147	0,220	0,275	0,313	0,352

$aR$ .....	0,8	1,0	1,2	1,6	2,0
$\eta$ .....	0,367	0,364	0,353	0,309	0,263

С учётом значений  $\eta$  из формулы (10.14) получим значения  $a_0$ :

$\frac{R}{h} \sqrt[3]{\frac{E_0(1 - \mu^2)}{E(1 - \mu_0^2)}}$ .....	0,0275	0,055	0,11	0,165	0,22
$a_0$ .....	6,31	5,10	3,82	3,17	2,71

$\frac{R}{h} \sqrt[3]{\frac{E_0(1 - \mu^2)}{E(1 - \mu_0^2)}}$ .....	0,33	0,44	0,55	0,66	0,88	1,1
$a_0$ .....	2,03	1,59	1,26	0,985	0,67	0,456

Рекомендуемое значение  $a_0$  при предварительных расчётах по формуле (10.14) равно 3,85.

## 14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОСТЕЛИ МНОГОСЛОЙНОГО ОСНОВАНИЯ.

Определим коэффициенты постели для деформируемой толщи, состоящей из конечного числа слоев различной высоты и с разными механическими характеристиками. Каждый слой основания считаем линейно-деформируемым.

Выделим из основания в пределах плиты, лежащей на его поверхности, вертикальный столбик с размерами  $dx$ ,  $dy$  в плане и высотой  $H$ , равной глубине деформируемой толщи (рис. 11.1, а).

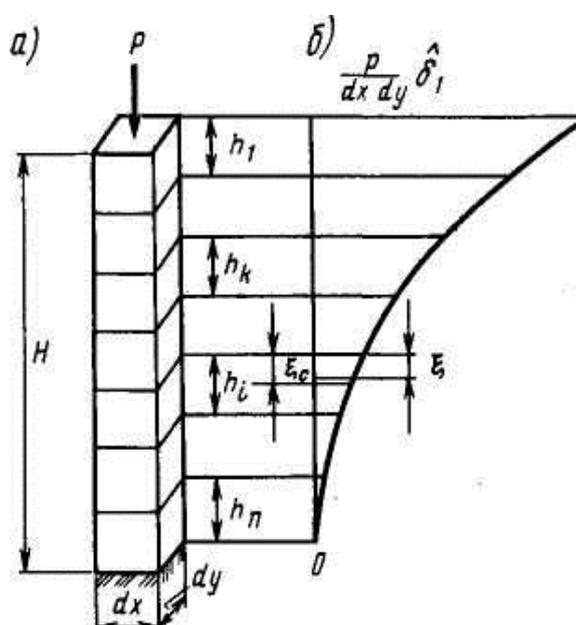


Рис. 11.1. Элементарный столбик грунта под плитой и эпюры вертикальных смещений.

Выразим осадку  $w = w(x, y, 0)$  столбика на уровне контакта его с нижней поверхностью плиты. Эта осадка вызвана действием силы  $p dx dy$ , где  $p(x, y)$  интенсивность вертикального давления плиты на поверхность основания и вертикальной касательной нагрузки, распределенной по боковой поверхности столбика. Действие нагрузки, нормальной к этой поверхности, не показанной на рисунке, учтено путем использования приведенных модулей упругости  $E_i$  в каждом  $i$ -м слое. Эти модули, как известно, могут иметь различные выражения в зависимости от допущений, принимаемых в отношении боковых деформаций  $\xi_x, \xi_y$  или напряжений  $\sigma_x, \sigma_y$ .

Игнорируя боковые деформации столбика, будем иметь:

$$E_i = E_{i,0} \frac{1 - \mu_i}{(1 + \mu_i)(1 - 2\mu_i)} \quad (11.1)$$

где  $E_{i,0}$ ,  $\mu_i$ , - модуль упругости и коэффициент Пуассона в  $i$ -м слое.

Следовательно, в процессе деформации стенки столбика останутся вертикальными, а его поперечное сечение постоянными. Вследствие этой предпосылки горизонтальные перемещения точек элементарного столбика:

$$u(x, y, z) = 0; v(x, y, z) = 0 \quad (11.2)$$

Касательные напряжения  $\tau_{zx(i)}$ ,  $\tau_{xy(i)}$ , действующие вертикально по боковой поверхности столбика, в пределах каждого  $i$ -го слоя характеризуются некоторыми криволинейными эпюрами, не имеющими скачков на границах смежных слоев, где эти касательные напряжения равны между собой по условиям взаимности. Но при переходе из одного слоя в следующий, эти эпюры могут иметь изломы вследствие различия в жесткостях слоев.

Рассмотрим состояние упомянутого столбика под действием вертикальной силы  $P$ , приложенной центрально в его верхнем сечении (см. рис. 11.1). При этом поперечные сечения столбика получают вертикальные смещения, эпюра которых показана на рис. 11.1. Здесь узловые ординаты этой эпюры обозначены сокращенно через  $(P/(dxdy))\delta_k$ , а произвольная ордината в  $i$ -том слое – через  $(P/(dxdy))\delta_i(\zeta)$ .

При номере узловой ординаты  $k$  имеем:

$$\hat{\delta}_k = \sum_{i=k}^{i=n} \frac{h_i}{E_i} \quad (11.3)$$

Таким образом,

$$\hat{\delta}_k = \sum_{i=k}^{i=n} \frac{h_i}{E_i} \dots; \hat{\delta}_n = \frac{h_n}{E_n} \quad (11.4)$$

В слое с номером  $i$  величина  $\delta_i(\zeta)$  изменяется по линейному закону в интервале  $\delta_i \leq \delta_i(\zeta) \leq \delta_{0+1}$ .

Используя теорему Бетти о взаимности работ в этом состоянии столбика получим:

$$w = \hat{p}\delta_1 + \left[ \frac{\partial \tau_{zx(i)}(x, y, 0)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy(i)}(x, y, 0)}{\partial y} \right] \times \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^{h_i} f_i(\xi) \delta_i(\xi) d\xi \quad (11.5)$$

Согласно линейным зависимостям между касательными напряжениями и деформациями сдвига:

$$\tau_{zx(i)}(x, y, 0) = G_1 \gamma_{zx(i)}(x, y, 0); \quad \tau_{zy(i)}(x, y, 0) = G_1 \gamma_{zy(i)}(x, y, 0) \quad (11.6)$$

где:  $G_1$  - модуль деформации сдвига в первом слое основания.

Выражения деформаций сдвига через перемещения имеют вид:

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (11.7)$$

Подставив эти уравнения в зависимости (11.16) и учитывая, при этом равенства (11.2), получим:

$$\tau_{zx(i)}(x, y, 0) = G_1 \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \tau_{zy(i)}(x, y, 0) = G_1 \frac{\partial w}{\partial y} \quad (11.8)$$

отсюда:

$$\frac{\partial \tau_{zx(i)}(x, y, 0)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy(i)}(x, y, 0)}{\partial y} = G_1 \nabla w \quad (11.9)$$

где,  $\nabla$  - оператор Лапласа.

При учете равенства (11.9) уравнение (11.5) примет более краткий вид:

$$w = \hat{p}\delta_1 + G_1 \nabla w \sum_{i=1}^{i=n} w_i \delta_i \quad (11.10)$$

отсюда:

$$p = \frac{1}{\hat{\delta}_1} w - G_1 \left( \frac{1}{\hat{\delta}_1} \right) \sum_{i=1}^{i=n} w_i \delta_i \quad (11.11)$$

Сопоставляя это выражение с известной зависимостью для двухконстантной модели упругого основания:

$$p = c_1 w - c_2 \nabla w \quad (11.12)$$

получим следующие формулы коэффициентов постели:

$$c_1 = 1 / \hat{\delta}_1; \quad c_2 = c_1 \left( \frac{1}{\hat{\delta}_1} \right) \sum_{i=1}^{i=n} w_i \delta_i \nabla w \quad (11.13)$$

Так как, при  $n = 1$  из выражений (11.4) имеем:

$\hat{\delta}_1 = h_2 / E_1 = H / E_1$ , то первая формула (11.13) в случае однородного упругого основания обращается в формулу:

$$c_1 = E_1 / H \quad (11.14)$$

и, таким образом, является обобщением последней на случай многослойного основания.

Коэффициент постели  $c_2$  во второй формуле (11.13) при значительной влажности грунта невелик и в практических расчетах может не учитываться.

## 15. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОГО МОДУЛЯ УПРУГОСТИ И ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ГЛУБИНЫ ДЕФОРМИРУЕМОГО СЛОЯ МНОГОСЛОЙНОГО ОСНОВАНИЯ.

Предполагается, что плита лежит на упругом основании из конечного числа неоднородных слоев. Число слоев конечно в пределах сжимаемой толщи грунта и каждый из них линейно деформируется в соответствии со своими механическими характеристиками. Ниже выведены формулы эквивалентных значений характеристик, которые позволяют заменить многослойную толщу однородным слоем.

Известно, что усилия в плите на однородном слое и многослойном основании будут одинаковы, если при прочих равных условиях будут соответственно одинаковы выражения реакций основания  $p(x,y)$  и перемещения упругой поверхности плиты  $w(x,y)$ .

Эквивалентными величинами характеристик основания будем считать такие, которые обеспечивают это условие.

Используем зависимость между функциями  $p$  и  $w$  в случае многослойного основания ( $G_1$  -модуль сдвига в первом случае):

$$G_1 \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^{h_i} f_i(\xi) \hat{\delta}_i(\xi) d\xi \nabla w - w = -\hat{\delta}_i p \quad (12.1)$$

где:  $\nabla$  - оператор Лапласа;

$f_i(\xi)$  - функция, определяющая форму эпюры касательных напряжений  $\tau_{zx(i)}$ ,  $\tau_{zy(i)}$ , по глубине каждого  $i$ -го слоя;

$\hat{\delta}_i(\xi)$  - функция вертикальных смещений, линейная в каждом слое;

$$\delta_i = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{h_i}{E_i} \quad (12.2)$$

$n$  - число слоев деформируемой толщи основания (счет слоев идет сверху вниз);  $h_i$ ,-толща слоя с номером  $i$ ;  $E_i$  - приведенный модуль упругости того же слоя;

$$E_i = \frac{E_{i(0)}}{1 - 2\mu_i^2} \quad (12.3)$$

$E_{i(0)}$ ,  $\mu_i$  – модуль упругости коэффициент Пуассона в том же слое.

Учитывая приближенность исходных данных, ограничимся в целях упрощения функцией  $f_i(\xi)$  многоугольного очертания с изломами на границах слоев и примем, что в нижней точке деформируемой толщи  $\tau_{zx(i)} = 0$ ,  $\tau_{zy(i)} = 0$ . Тогда уравнение (12.1) примет вид:

$$G_1 \beta w - w = -\hat{\delta}_1 p \quad (12.4)$$

где:

$$\beta = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{k=n} h_k [\hat{\delta}_n (2\hat{f}_n + \hat{f}_{n+1}) + \hat{\delta}_{n+1} (2\hat{f}_{n+1} + \hat{f}_n)] \quad (11.5)$$

$\hat{f}_n$ ,  $\hat{f}_{n+1}$  - значения функции  $f_i(\xi)$  на границе слоёв:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{\alpha_1} \sum_{i=k}^{i=n} \frac{h_i}{G_i}; \quad \hat{f}_{k+1} = \frac{1}{\alpha_1} \sum_{i=k+1}^{i=n} \frac{h_i}{G_i} \quad (12.6)$$

$$\hat{f}_1 = 1; \quad \hat{f}_{n+1} = 0; \quad \alpha_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{h_i}{G_i}$$

$$\hat{\delta}_k = \sum_{i=k}^{i=n} \frac{h_i}{E_i}; \quad \hat{\delta}_{k+1} = \sum_{i=k+1}^{i=n} \frac{h_i}{E_i}$$

$$\hat{\delta}_n = \frac{h_n}{E_n}; \quad \hat{\delta}_{n+1} = 0; \quad G_i = \frac{E_{i(0)}}{2(1 + \mu_i)}$$

$G_i$  - модуль деформации сдвига в  $i$ -м слое.

Выражения  $\delta_1$ ,  $\beta$ , и  $G$  при  $n = 1$ , т.е. в случае однородного упругого слоя:

$$\delta_1 = h/E, \beta = h^2/3E, G_1 = G.$$

Уравнение (12.4) в этом случае примет вид:

$$\frac{Gh^2}{3E} \nabla w - w = -\frac{h}{E} \quad (12.7)$$

Сопоставляя дифференциальные уравнения (12.4) и (12.7), заключаем, что  $E$ ,  $G$ ,  $h$ -эквивалентные величины модулей упругости и глубины однородного деформируемого слоя. Сравнивая соответственно коэффициенты уравнений (12.4) и (12.7), учитывая при этом:

$$G = \frac{E_0}{2(1+\mu)}; \quad E = \frac{E_0}{1-2\mu^2}; \quad G_1 = \frac{E_{1(0)}}{2(1+\mu_i)}$$

найдем:

$$\frac{(1-2\mu^2)h^2}{3(1+\mu)} = \frac{\beta E_{1(0)}}{1+\mu_i}; \quad \frac{1-2\mu^2}{E_0} = \hat{\delta}_1 \quad (12.8)$$

Отсюда получим выражения эквивалентного модуля упругости  $E_0$  и эквивалентной глубины деформируемого слоя  $h$ :

$$E_0 = \frac{1}{\hat{\delta}_1} \sqrt{A(1-2\mu^2)} \quad (12.9)$$

$$h = \sqrt{\frac{A}{1-2\mu^2}} \quad (12.10)$$

$$A = 3\beta \frac{1+\mu}{1+\mu_i} E_{1(0)} \quad (12.11)$$

Сопоставляя значения величин  $E_0$ ,  $\mu$ ,  $h$  при учете влияния упругого слоя в расчетах плит и имея в виду обычные значения  $\mu$ , в грунтах порядка 0,3-0,4, а также учитывая структуру формул (12.9) и (12.10), можно принять величину  $\mu$  в этих формулах как средневзвешенную между значениями  $\mu_i$  деформируемой толщи:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \mu_i h_i}{\sum_{i=1}^{i=n} h_i} \quad (12.12)$$

## **16. РАСЧЁТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ ОСНОВАНИЙ.**

Монолитные бетонные плиты полов укладывают на различные типы искусственных оснований, являющихся неотъемлемой частью несущей конструкции пола, обеспечивающей совместно с плитой пола передачу усилий от действующих эксплуатационных нагрузок на подстилающее грунтовое основание. В состав искусственного основания могут входить слои из щебня, гравия, песка и других местных материалов.

Иногда, возникает необходимость повысить несущую способность основания с целью снижения осадок его поверхности при произвольно расположенных статических и динамических нагрузках, в случае возникновения в грунте основания недопустимых сдвиговых напряжений и деформаций.

В этом случае целесообразно устраивать искусственные основания из грунто- и пескоцемента. Применение прочных искусственных оснований из материалов, укрепленных вяжущими, способствует, к конечному итоге, повышению прочности и долговечности устраиваемых полов.

Существующие способы расчёта не в достаточной мере учитывают особенности работы искусственных оснований для конструкций монолитных бетонных полов. В связи с этим были выполнены соответствующие исследования.

В результате проведённых исследований установлено, что при возрастании интенсивности нагружения наблюдаются остаточные деформации основания и работа грунта протекает в упруго - пластической стадии. Накопление остаточных деформаций грунта происходит вследствие образования сдвиговых деформаций в грунтовых основаниях. Особенно это проявляется при эксплуатации полов, воспринимающих многократные воздействия от перемещения тяжёлого грузоподъёмного транспорта. При сдвиговых деформациях от повторных нагрузок, неизбежно образующиеся значительные деформации грунтовых оснований, недопустимы, а при их допущении величина таких деформаций должна быть минимальна.

Для обеспечения надежности и долговечности конструкции полов необходимо рассматривать два предельных состояния искусственных оснований: по прочности конструкции плиты и искусственного основания и по прочности грунта.

Первое предельное состояние (по прочности плиты и искусственного основания) характеризуется расчётным условием:

$$M_p \leq M_{np} \quad (13.1)$$

где:  $M_p$  и  $M_{np}$  - соответственно, расчетный и предельный изгибающий моменты в плите и в искусственном основании.

Для определения расчетного изгибающего момента в плите и основании допустимо использовать решения линейной теории упругости для многослойных систем. В этом случае при проектировании армированных и не армированных конструкций полов на искусственных основаниях, укреплённых вяжущими, расчетные изгибающие моменты в плите определяются по следующим формулам:

для однослойных конструкций полов:

$$m_d = \frac{B}{B + B_f} m_{c,\max} k \rho ; \quad (13.2)$$

для верхнего слоя двухслойных плит с совмещенными швами:

$$m_{\text{sup}} = \frac{B_{\text{sup}}}{B_{\text{tot}}} m_{c,\max} k' \rho ; \quad (13.3)$$

для нижнего слоя двухслойных плит с совмещенными швами:

$$m_{\text{inf}} = \frac{B_{\text{inf}}}{B_{\text{tot}}} m_{c,\max} k' \rho ; \quad (13.4)$$

для верхнего слоя двухслойных плит с несовмещенными швами:

$$m_{\text{sup}} = \frac{B_{\text{sup}}}{B_{\text{tot}}} m_{c,\max} k_1 \rho ; \quad (13.5)$$

для нижнего слоя двухслойных плит с несовмещенными швами:

$$m_{\text{inf}} = \frac{B_{\text{inf}}}{B_{\text{tot}}} m_{c,\max} . \quad (13.6)$$

В формулах (13.2) - (13.6):

$B$  - жесткость однослойной плиты, отнесенная к единице ширины ее сечения;

$B_{\text{sup}}, B_{\text{inf}}$  - жесткость плиты соответственно верхнего и нижнего слоев двухслойной плиты пола, отнесенная к единице ширины ее сечения;

$B_f$  - жесткость обработанного вяжущими слоя основания;

$B_{tot}$  - суммарная жёсткость слоёв искусственного основания и плиты:

$$B_{tot} = B_{sup} + B_{inf} + B_f$$

$m_c, m_{max}$  - изгибающий момент при центральном загрузении, вычисляемый как для однослойной плиты жёсткостью  $B + B_f$ . При расчете двухслойной плиты изгибающий момент  $m_{c,max}$  определяют как для однослойной плиты жесткостью  $B_{tot}$ ;

$$\rho = 1 - 0,167 \cdot \theta_0 ;$$

$\theta_0$  - параметр, определяемый по графику (рис. 13.1) в зависимости от отношения  $\gamma_b = \frac{B}{B_f}$ ;

$k$  - переходный коэффициент, от изгибающего момента при центральном загрузении плиты к моменту при краевом загрузении плиты;

$k', k_l$  - коэффициенты, учитывающие способ соединений плит и концентрацию изгибающих моментов в верхнем слое двухслойной плиты над краями и углами нижнего слоя.

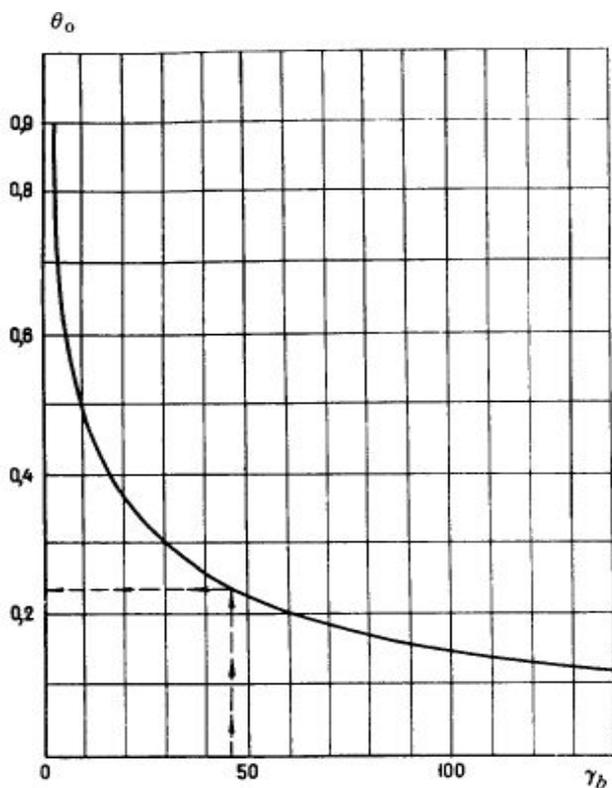


Рис. 13.1. График для определения коэффициента  $\theta_0$ .

Для двухслойных плит с несовмещенными швами должно дополнительно удовлетворяться условие  $\rho k_l \geq 1$ . Если это условие не удовлетворено, принимают  $\rho k_l = 1$ .

Толщину искусственных оснований под железобетонные плиты полов, работающих с раскрытием трещин и характеризующихся меньшей жесткостью, и следовательно, большими прогибами под воздействием статических и динамических нагрузок по сравнению с бетонными конструкциями полов определяют с использованием зависимостей, известной из теории расчета нежестких покрытий. Расчет ведут в следующей последовательности:

1. Находят значения требуемого коэффициента постели  $c_{mp}$  и упругой характеристики плиты  $l_{mp}$ , при которых соблюдаются условия прочности покрытия  $M_p = M_{np}$ ;

2. Выбирают материал основания и устанавливают значение его упругости;

3. Вычисляют величины  $\frac{E_{осн}}{1,8l_{mp}c_{mp}}$  и  $\frac{E_{осн}}{1,8lc}$  (где  $l$  - упругая характеристика плиты, лежащей на грунте с коэффициентом постели  $c$ ) и по номограмме (рис. 13.2) определяют точку пересечения кривых;

4. По номограмме определяют отношение  $d_{ycl}/h_{осн}$ ;

5. Определяют значение условного диаметра площади передачи нагрузки на основание:

$$d_{ycl} = \frac{2,5l_{TP}}{\sqrt{k_w}} k_a \quad (13.7)$$

где  $k_w$  - коэффициент, принимаемый равным:

$$D_x D_y : \quad 1,0 \quad 0,8 \quad 6,6 \quad 0,4 \quad 0,2$$

$$K_w : \quad 1,0 \quad 1,05 \quad 1,15 \quad 1,27 \quad 1,45$$

$k_a$  - коэффициент, принимаемый в зависимости от отношения радиуса круга, равновеликого площади отпечатка следа, к упругой характеристике плиты:

$$\alpha = R/l_{mp} : \quad 0,1 \quad 0,2 \quad 0,4 \quad 0,8 \quad 1,0$$

$$k_a : \quad 1,042 \quad 1,095 \quad 1,19 \quad 1,43 \quad 1,58$$

6. Определяют требуемую толщину искусственного основания:

$$h_{осн} = \frac{d_{усл}}{d_{усл}/h_{осн}} \quad (13.8)$$

Предельный изгибающий момент определяют в зависимости от толщины искусственного основания  $h_{осн}$  и расчетного сопротивления материала основания при изгибе  $R_{осн}$ :

$$M_{пр} = m \frac{bh_0^2}{6} R_{осн} \quad (13.9)$$

Второе предельное состояние (по сдвигу) предусматривает отсутствие пластических деформации сдвига или сведение их к минимуму. Для этого необходимо выполнить условие:

$$\tau_{a.м} + \tau_{a.в} \leq k_y c_{зр} \quad (13.10)$$

где:

$\tau_{a.м}$  - максимальное активное напряжение сдвига от временной нагрузки;

$\tau_{a.в}$  - то же от постоянной нагрузки (собственный вес плиты);

$k_y$  - коэффициент, характеризующий условия работы конструкции;

$c_{зр}$  - нормативное сцепление в грунте с учетом динамической нагрузки.

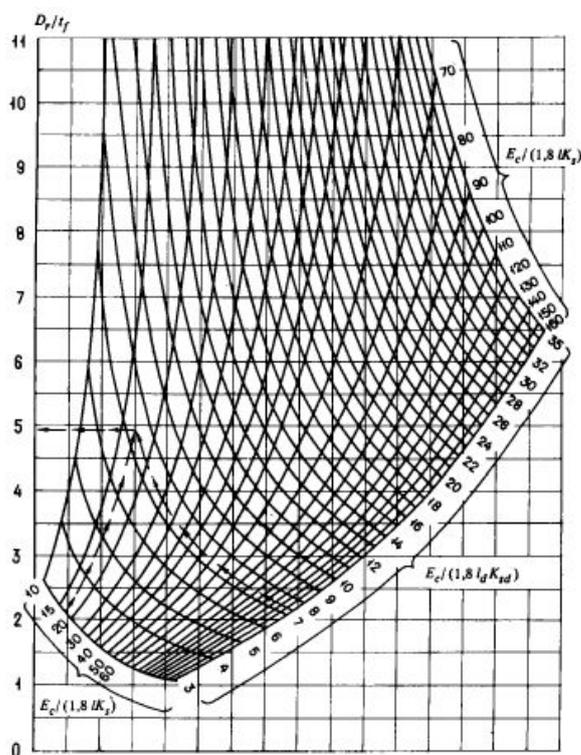


Рис. 13.2. Номограмма для определения отношения  $d_{усл}/h_{осн}$ .

Определение нормативных касательных напряжений, необходимых для вычисления максимальных касательных напряжений в грунте, производят в условиях объемного напряженного состояния. Для графического представления нормальных и касательных напряжений применяют круг Мора. Расчет по формуле (13.10) производится в два этапа. На первом этапе строят эпюру контактных давлений, передающихся на грунтовое основание от эксплуатационной нагрузки, приложенной к плите. На втором этапе контактные давления принимают за внешнюю нагрузку на грунтовое основание, от которой находят напряжения на разных глубинах. Для упрощения расчетов распределенную нагрузку заменяют сосредоточенными силами и применяют метод элементарного суммирования. Контактные давления можно определять по методу Б. Г. Коренева, М. И. Горбунова-Посадова, О. Я. Шехтер, Р. В. Серебряного.

Для нахождения предельных значений касательных напряжений достаточно рассмотреть предельное состояние грунта только под центром приложенной нагрузки. Поскольку, наибольшие касательные напряжения возникают под центром нагрузки, где всегда соблюдается условие  $\sigma_x = \sigma_y$ , то задача может быть упрощена и сведена к рассмотрению плоского напряженного состояния.

Активные напряжения сдвига зависят от вида граничных условий и определяются по формулам, полученным М. А. Железняковым:

для свободного примыкания:

$$\tau_{a,m} = \frac{1}{2 \cos \varphi_{mp}} \left[ \sqrt{(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 4\sigma_{xz}^2} - (\sigma_z + \sigma_x) \sin \varphi_{mp} \right] \quad (13.11)$$

при шарнирном сочленении:

$$\tau_{a,m} = \frac{1}{2 \cos \varphi_{mp}} \left[ (\sigma_z - \sigma_x) - (\sigma_z + \sigma_x) \sin \varphi_{mp} \right] \quad (13.12)$$

где:

$\varphi_{mp}$  - угол внутреннего трения грунта;

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xz}$  - нормальные и касательные напряжения в грунте.

Активное напряжение сдвига от собственного веса плиты:

$$\tau_{a,b} = \frac{\gamma h}{2 \cos \varphi} \left[ 1 - \varepsilon - (1 + \varepsilon) \sin \varphi \right] \quad (13.13)$$

где:

$\gamma$  - средняя плотность материалов плиты;

$h$  - толщина плиты;

$\varepsilon = \mu/(1 - \mu)$  - коэффициент бокового давления в материале искусственного основания;

$\mu$  - коэффициент Пуассона для подстилающего грунта.

Необходимую толщину искусственного основания, укрепленного вяжущими определяют, вычисляя  $\tau_{a.m}$  и  $\tau_{a.в}$  для ряда глубин и сопоставляя их по формуле (13.10). При этом находят такую глубину, при которой разница составляет +5%. Эту глубину и принимают за расчетную толщину искусственного основания при расчете по второму предельному состоянию.

Помимо рассмотренного расчета искусственных оснований по сдвигу, представляет интерес расчет на основе теории предельного напряженного состояния. Подобный расчет в первую очередь целесообразен для многослойных конструкций полов, для которых определение активных напряжений сдвига сложно.

Выполненные исследования подобных сооружений (дорог и аэродромов) показали, что прогрессивное нарастание осадки грунта при увеличении числа приложений нагрузки происходит вследствие образования деформаций сдвига в некотором объеме грунта вокруг периметра сформировавшегося уплотненного конуса, непосредственно примыкающего к давящей на основание площадке, вызывающих в грунте состояние предельного равновесия. При наступлении предельного состояния покрытие не способно сопротивляться эксплуатационным нагрузкам. Задача расчета искусственного основания состоит в том, чтобы обеспечить запас прочности для предотвращения наступления в нём состояния предельного равновесия. Как показали эксперименты, при отношении предельной нагрузки  $P_{np}$ , вызывающей в грунте состояние предельного равновесия, к величине действующего удельного давления на грунт  $q$ , равном не менее трех, грунтовое основание уплотняется и упрочняется и грунты работают как упругий массив.

Таким образом, необходимая толщина искусственного основания определяется из условия, чтобы  $P_{np} / q \geq 3$ . Приближенная формула для определения предельного давления на грунт выведена В. Г. Березанцевым (на основе ряда допущений, оправданных опытными данными). Уплотненное ядро под подошвой фундамента

принимается в виде конуса с углом при вершине по меридианному сечению, равным  $90^\circ$ . Для объемлющей поверхности скольжения, начинающейся от вершины уплотненного ядра, принято очертание, показанное на рис. 8.3. Образующая этой поверхности состоит из отрезка логарифмической спирали  $BC$  и отрезка прямой  $CD$ . Путем интегрирования дифференциального уравнения предельного равновесия по заданному очертанию поверхности скольжения получена формула для определения предельного давления на грунт:

$$P_{np} = N_\gamma \gamma z + N_q q + N_c C_c \quad (13.14)$$

где:

$N_\gamma, N_q, N_c$  - коэффициенты, значения которых приведены в табл. 1;

$r$  - радиус чаши прогиба основания;

$q$  - равномерная пригрузка плиты и основания;

$C_c$  - коэффициент сцепления грунта.

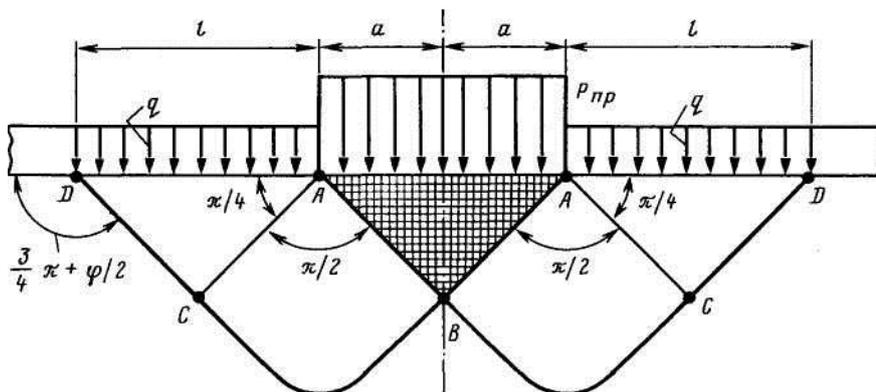


Рис.13.3 Расчётная схема для определения предельного давления на грунт.

Расчет по второму предельному состоянию на основе предельного напряженного состояния ведут в такой последовательности:

- задаются толщиной искусственного основания;
- производят расчет на заданную нагрузку, определяют осадку  $w$  и далее определяют интенсивность нагрузки на грунт по формуле:

$$\sigma = w c$$

где  $c$  – эквивалентный коэффициент постели грунта;

- по формуле (13.14) определяют предельное давление на грунт;

- определяют отношение  $P_{np} / q$ , если оно равно или более трех, расчет заканчивают. Если оно менее трех, необходимо увеличить толщину искусственного основания и расчет производится заново до тех пор, пока не будет достигнуто отношение  $P_{np} / q = 3$ .

Таблица 13.1.

Коэффициент	Коэффициент внутреннего трения $\phi$ , град.							
	16	20	24	28	32	36	40	42
$N_\gamma$	4,1	7,3	14	25,3	48,8	97,2	216	317
$N_q$	4,5	8,5	14,1	24,8	45,5	87,6	185	270
$N_c$	12,8	20,9	29,9	45	71,5	120	219	300

Следует заметить, что при определенных условиях эксплуатации полов, где возможна их работа в определённый, незначительный период, с допущением остаточных деформаций, возможно, принять отношение  $P_{np} / q = 2,5$  и устраивать искусственные основания небольших толщин.

При назначении требуемой толщины искусственного основания, необходимо сопоставить результаты расчетов по первому и второму предельным состояниям. Наибольшую толщину слоя искусственного основания принимают за расчетное; оно гарантирует его надежность, с учетом прочности материала основания и предусматривает отсутствие возможных пластических деформаций сдвига в естественном грунтовом основании, что способствует повышению прочности и долговечности конструкций промышленных полов.

## 17. РАБОТЫ, ОПУБЛИКОВАННЫЕ АВТОРОМ.

По данной теме автором опубликованы следующие работы:

1. Горб А.М. «Состояние, проблемы и основные факторы, влияющие на устройство качественных бетонных полов на объектах промышленно-складского назначения». // Склад и Техника. 2006 г. №10. С. 16 - 17.
2. Горб А.М. «Обеспечение эксплуатационной надёжности пола на современном складе». // Склад и Техника. 2007 г. №11. С. 40 – 42.
3. Горб А.М. «Качественный пол – гарантия непрерывности и успешности бизнес-процессов современного склада». // Склад и Техника. 2007 г. №10. С. 52 – 55.
4. Горб А.М., Войлоков И.А. «Разъяснения по вопросу сбора нагрузок и составления технического задания на проектирование полов в складских помещениях, оборудованных сборными многоярусными стеллажами». // Склад и Техника. 2009 г. №8. С. 40 – 42.
5. Горб А.М. «В сложной ситуации – найти оптимальное инженерное решение». // Мир строительства и недвижимости. 2008 г. №28. С. 38 – 40.
6. Горб А.М. «На том стоим». // Мир строительства и недвижимости. 2008г. №27. С. 53 – 56.
7. Горб А.М. «Рациональный подход».//Мир строительства и недвижимости. 2007 г. №23. С. 53 – 58.
8. Горб А.М. «Проектирование и расчёт конструкций промышленных полов». // Мир строительства и недвижимости. 2009 г. №23. С. 53 – 58.
9. Горб А.М. «Особенности проектирования и изготовления полов в высотных складах». // Складской комплекс. 2005 г. №5. С. 19.
10. Горб А.М., Войлоков И.А. «Расчёт комбинированно армированных полов с использованием разномодульной теории упругости». //Стройпрофиль. 2009 г. №5 (74). С. 12-18.
11. Горб А.М., Войлоков И.А. «Применение теории линий разрушения Лосберга в частных случаях краевых нагрузжений». //Труды МГСУ. 2008 г. №1. С. 42-45.
12. Горб А.М., Войлоков И.А. «Промышленные полы. Вопросы проектирования». (Продолжение)//Стройпрофиль. 2009 г. №4 (74). С. 6, 7.
13. Горб А.М., Войлоков И.А. «Промышленные полы. Проблемы надёжности и долговечности». //Доклад на НТС ОАО «ЦНИИПРОМЗДАНИЙ». 2008 г.
14. Горб А.М. «Сравнительный анализ методик аналитических решения задач плоской теории упругости». // Строительная механика и теория сооружений. 2007 г. №2. С. 10-14.
15. Горб А.М., Войлоков И.А. «Определение начальной критической нагрузки в случае расчёта плиты с использованием модели местных упругих деформаций». // Труды сотрудников кафедры ТОЭС ГОУ СПбГПУ. 2009 г.
16. Горб А.М., Войлоков И.А. «Правильное проектирование как решения вопроса долговечности эксплуатации промышленных полов». // Труды сотрудников кафедры ТОЭС ГОУ СПбГПУ. 2009 г.

17. Горб А.М., Войлоков И.А. «О некоторых ошибках при проектировании, строительстве и эксплуатации бетонных полов в зданиях промышленно-складского назначения». // Труды сотрудников кафедры ТОЭС ГОУ СПбГПУ. 2009 г.
18. Горб А.М., Войлоков И.А. «Разъяснение о типах швов в железобетонной плите покрытия контейнерной площадки, их ширине и расстоянии между ними при строительстве контейнерной площадки на объекте «PSA PEUGEOT CITROEN» на территории «индустриального парка «РОСВА». // Труды сотрудников кафедры ТОЭС ГОУ СПбГПУ. 2009 г.
19. Горб А.М., Войлоков И.А. «Проектирование и устройство полов на слабых водонасыщенных грунтах». // Труды сотрудников кафедры ТОЭС ГОУ СПбГПУ. 2009 г.
20. Горб А.М., Войлоков И.А. «Линейные перемещения плит бетонных покрытий по данным экспериментальных исследований». // Труды сотрудников кафедры ТОЭС ГОУ СПбГПУ. 2009 г.
21. Горб А.М., Войлоков И.А. «Промышленные полы. Вопросы проектирования». // Стройпрофиль. 2009 г. №3 (73). С. 32 - 34.
22. Горб А.М., Войлоков И.А. «Промышленные полы. Вопросы проектирования». (Продолжение)//Стройпрофиль. 2009 г. №4 (74). С. 6, 7.

## 18. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. СНиП 2.03.13-88 «Полы. Нормы проектирования»
2. СНиП 2.03.01-84\* «Бетонные и железобетонные конструкции»
3. СНиП 2.05.08-85 «Аэродромы»
4. СНиП 32-03-96 «Аэродромы»
5. «Рекомендации по расчету бетонных подстилающих слоев промышленных зданий с учетом экономической ответственности». (ЦНИИ Промзданий, 1987 г.)
6. «Руководящие технические материалы по проектированию и применению сталефибробетонных строительных конструкций РТМ - 17-01-2002 (ГУП НИИЖБ, 2002 г.)
7. «Полы. Технические требования и правила проектирования, устройства, приёмки, эксплуатации и ремонта" (в развитие СНиП 2.03.13-88 «Полы. Нормы проектирования» и СНиП 3.04.01-87 "Изоляционные и отделочные покрытия") (ОАО ЦНИИПРОМЗДАНИЙ 2004 г).
8. СНиП 2.02.01-83\* «Основания зданий и сооружений»
9. СП 50-101-2004 «Проектирование и устройство оснований зданий и сооружений»
10. ТСН 50-302-2004 "Проектирование зданий и сооружений в г. Санкт-Петербурге
11. СП 52-104-2006 "Сталефибробетонные конструкции"
12. СНиП 3.03.01-87 "Несущие и ограждающие конструкции"
13. СН 52-101-2003 "Бетонные и железобетонные конструкции из тяжёлого бетона без предварительного напряжения арматуры"
14. СН52-01-2003 "Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения"
15. "Пособие по проектированию бетонных и железобетонных конструкций из тяжёлого бетона без предварительного напряжения арматуры" (Пособие к СН 52-101-2003).
16. РД 31.31.46-88 «Методика расчёта и конструирования жёстких покрытий морских портов»
17. ВСН 197-91 «Инструкция по проектированию жестких дорожных одежд».
18. Проктор Г.Э. «Об изгибе балок, лежащих на сплошном упругом основании без гипотезы Винклера – Циммермана». Дипломная работа в Петроградском технологическом институте, 1922 г.
19. Пастернак П.Л. «Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи 2-х коэфф. постели». Госстройиздат. М.Л.,1954 г.

20. Филоненко - Бродич М.М. «Некоторые приближённые теории упругого основания». Учённые записки МГУ, выпуск №46, 1940 г.
21. Власов В.З. «Строительная механика тонкостенных пространственных систем». Госстройиздат 1949 г.
22. Манвелов Л.И. «Расчёт балок на упругом основании с двумя коэффициентами постели». Труды НИАИ ВВС, выпуск № 56, 1956 г.
23. Егоров К.Е. «Распределение напряжений и перемещений в основании конечной толщины». Сборник трудов НИИОСП. Механика грунтов, №34, 1958 г.
24. Власов В.З, Леонтьев Н.Н. «Балки, плиты и оболочки на упругом основании». Госстройиздат, М., 1949 г.
25. Манвелов Л.И., Бартошевич Э.С. «Расчёт прямоугольной плиты на упругом основании». «Строительная механика и расчёт сооружений», М., №5, 1963 г.
26. Киттовер К.А. «К расчёту прямоугольных плит на упругом основании». ОНТИ М.-Л. 1936 г.
27. Касабьян Л.В. «Расчёт прямоугольных плит на упругом основании». Автореферат канд. Диссерт. МИСИ 1956 г.
28. Винокуров Л.П. «Расчёт плит на упругом полупространстве с применением инженерно-дискретного метода». «Вестник инженеров и техников» №4 1951 г.
29. Соломин В.И. «Расчёт прямоугольных пластин на упругом полупространстве методом сеток». «Строительная механика и расчёт сооружений» №5 1960 г.
30. Корупский В.С. «Расчёт прямоугольных плит, лежащих на упругом основании».
31. Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И. "Расчёт конструкций на упругом основании", 1984 г.
32. Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., "Расчёт конструкций на упругом основании", 1973 г.
33. Горбунов-Посадов М.И., "Плиты на упругом основании", 1941 г.
34. Шехтер О.Я., Винокурова А.В., "Расчёт плиты на упругом основании", 1936г.
35. Серебряный Р.В., "Расчёт тонких шарнирно-соединённых плит на упругом основании", 1962 г.
36. Линович Л.Е., "Расчёт и конструирование", 1972 г.
37. "Основания, фундаменты и подземные сооружения" ("Справочник проектировщика по редакцией Е.А.Сорочана) 1984 г.
38. Коренев Б.Г., "Вопросы расчёта балок и плит на упругом основании", 1954 г.
39. Горлов А.М., Серебряный Р.В., "Автоматизированный расчёт прямоугольных

- плит на упругом основании", 1968 г.
40. Симвулиди И.А., "Расчёт инженерных конструкций на упругом основании", 1968г.
  41. Рабинович Ф.Н., "Композиты на основе дисперсно армированных бетонов", 2004г.
  42. Жемочкин Б.Н., "Теория упругости", 1948 г.
  43. Филоренко-Бродич М.М., "Теория упругости" 1947 г.
  44. Алейников С.М., "Метод граничных элементов в контактных задачах для упругих пространственно неоднородных оснований", 2000 г.
  45. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., "Теория упругости", 2007г.
  46. "Функциональные прерыватели Герсеванова и расчёт конструкций на упругом основании" («Основания, фундаменты и механика грунтов» 2000 г., №4 С.18-23)
  47. Флорин В.А. , "Основы механики грунтов" 1959 г.
  48. Федоровский В.Г., Безволев С.Г., Дунаева О.М. "Методика расчёта фундаментных плит на нелинейно-деформируемом во времени основании" 1993г.
  49. Безволев С.Г., Федоровский В.Г., Александрович В.Ф. "Совершенствование расчёта осадок оснований методом послойного суммирования" 1991 г.
  50. Тейлор Д. "Основы механики грунтов" 1960 г.
  51. Тер-Мартиросян З.Г. "Механика грунтов"2005 г.
  52. Бартоломей А.А. "Механика грунтов". 1998 г.
  53. Герсеванов Н.М., Покровский Г.И., Абелев Ю.М., Польшин Д.Е. "Расчёт балки на упругом основании без гипотезы Циммермана-Винклера" (Сб. тр. №8) 1937 г.
  54. "Исследование методов расчёта толщины дорожных покрытий" (ДОРНИИ) 1938г.
  55. Чернов Ю.Т.. "Вибрации строительных конструкций". 2006г.
  56. Долматов Б.И., Бронин В.Н., Карлов В.Д., Мангушев Р.А., Сахаров И.И., Скотников С.Н., Улицкий В.М., Фадеев А.Б. "Основания и фундаменты" 2002 г.
  57. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. «Пластинки и оболочки». 1963г.
  58. Амбарцумян С.А. «Разномодульная теория упругости. 1982г.
  59. Берг О.Я., Щербаков Е.Н., Писанко Г.Н. «Высокопрочный бетон». 1971г.
  60. Ахвердов И.Н. «Основы физики бетона» , 1981 г.
  61. Безухов Н.И. «Основы теории упругости и пластичности». 1961 г.

62. Пухаренко Ю.В. «Принципы формирования структуры и прогнозирование прочности фибробетона». «Строительные материалы» №10 2004 г.
63. Волков И.В. «Проблемы применения фибробетона в отечественном строительстве». «Строительные материалы» №6 2004 г.
64. Коротышевский О.В. «Расчёт сталефибробетона по прочности на осевое растяжение и на растяжение при изгибе». «Строительные материалы» №8 2003 г.
65. Волков И.В., Газин Э.М. «Фибровая арматура для бетона». Материалы 1-й всероссийской конференции по проблемам бетона и железобетона «Бетон на рубеже 3-го тысячелетия». Москва 2001 г.
66. Галкин В.В., Черноусов Н.Н. «Прочность и долговечность мелкозернистого сталефиброшлакобетона. Материалы 1-й всероссийской конференции по проблемам бетона и железобетона «Бетон на рубеже 3-го тысячелетия». Москва 2001г.
67. Бычков Э.Ю. «Полипропиленовые волокна «Фибрин» уменьшают взрывное откалывание при пожаре». Материалы 1-й всероссийской конференции по проблемам бетона и железобетона «Бетон на рубеже 3-го тысячелетия». Москва 2001г.
68. Талантова К.В., Михеев Н.М., Толстеньев С.В. Тремасов А.С. «Повышение эксплуатационных характеристик конструкций для дорожного строительства за счёт применения строительного композита – сталефибробетона». Материалы 1-й всероссийской конференции по проблемам бетона и железобетона «Бетон на рубеже 3-го тысячелетия». Москва 2001 г.
69. Юрьев А.Г., Панченко Л.А. «Экспериментальные исследования стеклофибробетонных элементов конструкций». Материалы 2-й всероссийской конференции по проблемам бетона и железобетона «Бетон и железобетон – пути развития». Москва 2005 г.
70. Кумар Вирендра. «Статическая прочность сталефибробетона на изгиб». Материалы 2-й всероссийской конференции по проблемам бетона и железобетона «Бетон и железобетон – пути развития». Москва 2005 г.
71. Ленг Кристофер К.У., Манди У.М. «Подход к эмпирическому расчёту усиления фибробетонных балок, с применением нейронных сетей». Материалы 2-й всероссийской конференции по проблемам бетона и железобетона «Бетон и железобетон – пути развития». Москва 2005 г.

72. Савир Ц., Данцигер А.Н. «Расчёт на сдвиг балок из высокопрочного железобетона с фибрами». Материалы 2-й всероссийской конференции по проблемам бетона и железобетона «Бетон и железобетон – пути развития». Москва 2005 г.
73. Бутадаева А.В., Кардумян Г.С., Каприелов С.С., «Высокопрочные модифицированные бетоны из самовыравнивающихся смесей». Материалы 2-й всероссийской конференции по проблемам бетона и железобетона «Бетон и железобетон – пути развития». Москва 2005 г.
74. Liu Yu-Wen, Hsu – tsao, Chen Ten-Ming. «Влияние поверхностных трещин на сопротивление бетона истиранию». Материалы 2-й всероссийской конференции по проблемам бетона и железобетона «Бетон и железобетон – пути развития». Москва 2005 г.
75. Беддар М. «Настоящее и будущее фибробетона». Материалы 2-й всероссийской конференции по проблемам бетона и железобетона «Бетон и железобетон – пути развития». Москва 2005 г.
76. Моргун Л.В., Моргун В.Н. «Технология фибропенобетона». Материалы 2-й всероссийской конференции по проблемам бетона и железобетона «Бетон и железобетон – пути развития». Москва 2005 г.
77. Доклад по программе *NCHRP №371* за 1995 год. «Опора под бетонными дорожными покрытиями из портландцемента».
78. TR №34 "Бетонные промышленные полы" (CS)
79. TR № 62 Методические указания по расчёту констр. из сталефибробетона (CS)
80. ASI 440R-07 «Report on Fiber-Reinforced Polymer (FRP) Reinforcement for Concrete Structures».
81. ASI 302.1R-04 «Guide for Concrete Floor and Slab Construction»
82. ACI 360R-06 «Design of Slabs-on-Ground»
83. Wieghardt K. Balken aufnachgiebiger Unterlage. Zeit-schrift fur Math. und Phys. v.2, 1922.
84. Marguerre K. Spannungsverteilung und Wellenausbreitung in der kontinuierlich gestutzten Platten. Ingenieur Archiv, v. IV 1933.
85. Happel H. Uber das Gleichgewicht von elastischen Platten unter einer Einzellast.
86. Westergaard H.M. Stress concentration in plates loaded over small areas. Trans. ASCE, v. 108, 1943.

87. Iguschi S. Eine Losung fur die Berechnung der Biegsamer rechteckigen Platten.  
Berlin,1933.
88. Nomachi S. Studies of pavements slabs by the thin plate theory. Pros. Of the 2-and Jab  
Nat. Congress for appl. mech.
89. Vinkler E. die Lehre von der Elastizetat und Festigkeit, 1867.

## **19. Приложения.**